Jun.-Prof. PD Dr. D. Mugnolo
F. Stoffers

Sommersemester 2012
27. April 2012

Analysis I
2. Übungsblatt

Abgabe: *Freitag, 04. Mai 2012, 9:00 Uhr in der Vorlesung*

1. Aufgabe (4+4=8 Punkte)

(a) Beweisen Sie mit dem Induktionsprinzip, dass $2^n \leq (n+1)!$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (Hierbei ist $n! := 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$).

(b) Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $2n^2 - 4 > n^2 + 6n + 2$? Beweisen Sie die aufgestellte Aussage anschließend mit dem Induktionsprinzip.

2. Aufgabe (3+6=9 Punkte)
Man definiere eine Totalordnung $\leq_2$ auf der Menge W aller *Wörter* bestehend aus 2 Buchstaben mit Hilfe der bekannten alphabetischen Totalordnung $\leq$ auf der Buchstabenmenge $A := \{a, b, ..., z\}$. Zeigen Sie also:

(a) Die Relation $\leq$ definiert eine Totalordnung auf der Menge A.

(b) Die definierte Relation $\leq_2$ auf W (diese Menge ist zunächst formal zu definieren!) ist eine Totalordnung.

3. Aufgabe (4+4=8 Punkte)
Man zeige, dass die Totalordnung $\leq$ auf $\mathbb{N}$ mit der Addition und Multiplikation verträglich ist, d.h. dass Folgendes gilt:

(i) Für alle $m, n, p \in \mathbb{N}$ gilt $m \leq n \Leftrightarrow m + p \leq n + p$.

(ii) Für alle $m, n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt $m \leq n \Leftrightarrow mp \leq np$.

4. Aufgabe (2+1+2+2+2=9 Punkte)

(a) Sei f eine Abbildung der Menge X in die Menge Y und seien A und B Teilmengen von X. Man zeige, dass Folgendes gilt:

(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

(ii) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

(iii) Man zeige anhand eines Gegenbeispiels, dass im Allgemeinen nicht $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ gilt.

(b) Sei f eine Abbildung der Menge X in die Menge Y und seien A' und B' Teilmengen von Y. Hierbei bezeichne für eine beliebige Menge $M \subset Y$ $\;f^{-1}(M) = \{x \in X : f(x) \in M\}$ das Urbild von M unter f. Man zeige, dass Folgendes gilt:

(i) $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$

(ii) $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$.