Jun.-Prof. PD Dr. D. Mugnolo
F. Stoffers

Sommersemester 2012
25. Mai 2012

Analysis I
6. Übungsblatt

Abgabe: *Freitag, 01. Juni 2012, 9:00 Uhr in der Vorlesung*

1. Aufgabe (4+4+4=12 Punkte)
Man beweise folgende Aussagen:

(a) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^d,\ \ d \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, konvergiert genau dann bezüglich der Norm $\|.\|_1$ gegen $x = (x^1, ..., x^d) \in \mathbb{R}^d$, wenn für alle $k \in \{1, ..., d\}$ die Koordinatenfolge $(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x^k konvergiert. Hierbei ist die $1-$Norm $\|.\|_1$ gegeben durch $\|(x^1, ..., x^d)\|_1 := \sum_{i=1}^d |x^i|$ für alle $x = (x^1, ..., x^d) \in \mathbb{R}^d$.

Bemerkung: Tatsächlich kann man zeigen, dass im $\mathbb{R}^d$ die Konvergenz bezüglich einer Norm stets die Konvergenz bezüglich einer jeden anderen Norm impliziert, so dass im $\mathbb{R}^d$ alle Normen "gleichberechtigt" sind.

(b) Zwei Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im $\mathbb{R}^d,\ \ d \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, konvergieren genau dann, wenn $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren, wobei die Norm $\|.\|_1$ zugrunde gelegt wird.

(c) Es sei $q \in (0, 1)$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $x_n > 0$ und $x_{n+1} \leq qx_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0.

Hinweis: Man kann Aufgabe 2(c) verwenden.

2. Aufgabe (4+3+2=9 Punkte)
Man beweise die folgenden Aussagen:

(a) Für jede reelle Zahl $x \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

(b) Sei $b \in \mathbb{R}$ mit $b > 1$. Dann existiert für alle $k \in \mathbb{R}$ ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $b^n > k$ gilt.

Hinweis: Man verwende Teil (a).

(c) Sei $b \in \mathbb{R}$ mit $0 < b < 1$. Dann existiert für alle $\epsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b^n < \epsilon$.

3. Aufgabe (5 Punkte)
Es sei $(X, ||.||)$ ein normierter Raum. Man zeige, dass die inverse Dreiecksungleichung gilt: Für alle $x, y \in X$ gilt:

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\| \ .$$

4. Aufgabe (5+5=10 Punkte)
Es seien E eine nichtleere Menge, $(X, \|.\|)$ ein normierter Raum über dem Körper der reellen Zahlen und $B(E, X)$ die Menge aller beschränkten Funktionen $f : E \to X$, für die also $\|f\|_\infty := \sup_{x\in E} ||f(x)|| < \infty$ gilt. Auf $B(E, X)$ werden Addition und die skalare Multiplikation wie folgt definiert:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$
$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$$

für alle $f, g \in B(E, X), \lambda \in \mathbb{R}, x \in E$. Man zeige, dass $\Big(B(E, X), \|.\|_\infty\Big)$ ein normierter Raum ist, d.h. dass $B(E, X)$ ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$ ist und $\|.\|_\infty$ eine Norm auf $B(E, X)$ definiert.