Jun.-Prof. PD Dr. D. Mugnolo
F. Stoffers

Sommersemester 2012
15. Juni 2012

Analysis I
9. Übungsblatt

Abgabe: *Freitag, 22. Juni 2012, 9:00 Uhr in der Vorlesung*

1. Aufgabe (6+4=10 Punkte)

(a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}} := \left(\sqrt[n]{n}\right)_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}}$. Man zeige, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ gilt.

Hinweis: Man zeige, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}}$ monoton fallend ist mit $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\} = 1$.

(b) Es sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$. Man zeige, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ gilt.

Hinweis: Der Beweis lässt sich unter Verwendung des Sandwichkriteriums und Teil (a) führen.

2. Aufgabe (6+4+4=14 Punkte)

(a) Man beweise das Quotientenkriterium (für Reihen) mit Hilfe des Wurzelkriteriums.

(b) Man zeige, dass es Folgen gibt, die die Voraussetzungen des Wurzelkriteriums erfüllen, jedoch nicht die des Quotientenkriteriums (so dass sich das Wurzelkriterium nicht direkt aus dem Quotientenkriterium ableiten lässt).

Hinweis: Man betrachte die mit der Folge

$$a_n := \begin{cases} 2^{-n} & \text{für } n \text{ gerade} \\ 3^{-n} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

assoziierte Reihe.

(c) Man zeige, dass im Fall "$q = 1$" weder beim Wurzelkriterium noch beim Quotientenkriterium eine Konvergenzaussage über die zugehörige Reihe möglich ist.

Hinweis: Man betrachte für geeignete $s \in \mathbb{Q}$ die mit den Folgen

$$a_n := n^{-s},\ n \in \mathbb{N}$$

assoziierten Reihen.

3. Aufgabe (3+3+3+4=13 Punkte)

(a) Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz (ohne Grenzwertbestimmung, falls die Reihe konvergiert):

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 3^n}{(2n)!}$

(b) Man bestimme den Grenzwert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.

Hinweis: Man versuche, den Ausdruck $\frac{1}{4n^2-1}$ in der Form

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1},\ A, B \in \mathbb{R}$$

darzustellen.

4. Aufgabe (6+4=10 Punkte)

(a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer reeller Zahlen. Man beweise: Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergiert.

(b) Man bestimme mit Hilfe von (a) die $\alpha > 0$, für die die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

konvergiert.