Analysis 3

gelesen von Frédéric Stoffers
nach einem Skript von Prof. Dr. Friedmar Schulz

Inhaltsverzeichnis

1 Regularisierung und Approximation

In diesem Kapitel entwickeln wir eine allgemeine Regularisierungs- und Approximationstheorie, in deren Rahmen der Weierstraßsche Approximationssatz bewiesen werden wird, nämlich dass jede stetige Funktion durch Polynome approximiert werden kann. Wir greifen auf Ideen von K. Weierstraß und K.O. Friedrichs zurück um Funktionen zu glätten beziehungsweise zu regularisieren, das heißt, sie durch Funktionen mit besseren Differenzierbarkeitseigenschaften zu approximieren. Zu diesem Zweck werden zunächst geeignete Hilfsfunktionen konstruiert, mit deren Hilfe sich diese Glättungsoperationen bewerkstelligen lassen.

Wir werden diese Konstruktionen verfeinern und werden Werkzeuge bereitstellen, mit deren Hilfe die großen Sätze beziehungsweise Formeln der Analysis, wie zum Beispiel die Transformationsformel für n-fache Integrale und der Gaußsche Integralsatz, bewiesen werden können. Ein Ergebnis in diese Richtung ist der Satz über die Zerlegung der Eins, welcher es erlaubt, globale Aussagen zu lokalisieren. Um die genannten Sätze der Analysis zu beweisen, zeigt man daher in einem ersten Schritt lediglich eine lokale Version, was sich deutlich einfacher gestaltet. In der in diesem Kapitel bereitgestellten Werkzeugkiste findet sich dann die Maschinerie, das heißt die Hilfsfunktionen und Techniken, um die globale Version, also den allgemeinen Satz, aus der lokalen Version herzuleiten.

1.1 Glättungsfunktionen

Die folgende Funktion stellt den Ausgangspunkt für unsere Konstruktionen dar: Als **Ausgangsfunktion** wählen wir die Funktion $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\phi(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t \leq 0. \end{cases}$$

Sie ist unendlich oft differenzierbar, $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$, jedoch verschwindet die Taylorreihe $T\phi(0,t)$ mit Entwicklungspunkt $t_0 = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ identisch, weshalb sie ϕ in keiner Umgebung von 0 darstellt, das heißt, die Funktion ϕ ist nicht reell-analytisch, $\phi \notin C^\omega(\mathbb{R})$. Genauer gilt:

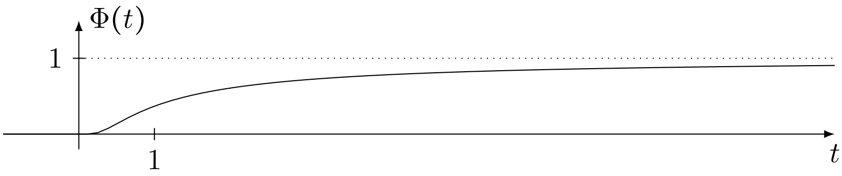

Abbildung 1.1: *Die Ausgangsfunktion* ϕ

1.1 Lemma. *Die Funktion* ϕ *gehört zur Klasse* $C^\infty(\mathbb{R})$*; außerdem ist* $0 \le \phi(t) \le 1$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$ *und es gilt* $\phi(t) \to 1$ *für* $t \to \infty$.

Beweis. Durch vollständige Induktion über $k \in \mathbb{N}_0$ zeigt man, dass alle Ableitungen $\phi^{(k)}(t)$ von ϕ für $t > 0$ die Form

$$\phi^{(k)}(t) = \frac{d^k\phi}{dt^k}(t) = P_k\left(\frac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t}}$$

haben mit einem Polynom $P_k = P_k(s) = \sum_{\ell=0}^{2k} a_\ell s^\ell$ vom Grad $2k$. Weil die Exponentialfunktion für $s = \frac{1}{t} \to +\infty$ stärker nach $+\infty$ wächst als jedes Polynom, konvergiert $\phi^{(k)}(t)$ deshalb für $t \to 0$ gegen 0. Durch vollständige Induktion über k folgt daher die Existenz der rechtsseitigen $k+1$-ten Ableitung

$$\phi^{(k+1)}(0^+) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\phi^{(k)}(t) - \phi^{(k)}(0)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{P_k\left(\frac{1}{t}\right)}{t} e^{-\frac{1}{t}} = 0$$

und daraus die Behauptung. □

Aus der Ausgangsfunktion ϕ konstruieren wir die **Glockenfunktion** $\varrho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\varrho(x) := \frac{1}{c_n}\phi(1 - |x|^2) = \frac{1}{c_n}\begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{für } |x| < 1 \\ 0 & \text{für } |x| \ge 1, \end{cases}$$

mit $c_n := \int_{\mathbb{R}^n} \phi(1 - |x|^2)\,dx = \int_{|x|<1} e^{\frac{1}{|x|^2-1}}\,dx$, welche nach der Kettenregel zur Klasse $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ gehört. Sie nimmt ihr Maximum $\frac{1}{c_n e}$ im Nullpunkt an.

1.2 Definition. Eine Funktion $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt eine (Standard-)**Glättungsfunktion** (engl. mollifier) oder ein **Regularisator** der Klasse $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, wir sagen einfach eine Glättungsfunktion, falls sie die folgenden Eigenschaften besitzt:

(i) $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$,

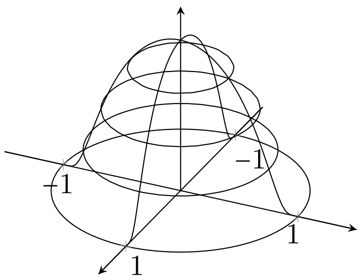

Abbildung 1.2: *Glockenfunktion*

(ii) $\psi(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$,

(iii) $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\, dx = 1$,

(iv) Es existiert $R > 0$, so dass $\Psi(x) = 0$ für $|x| \geq R$

1.3 Bemerkung. Man weist leicht nach, dass die zuvor konstruierte Funktion $\varrho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ offenbar die Voraussetzungen (i)-(iv) aus Definition 1.2 erfüllt und damit eine Glättungsfunktion ist. Wir nennen sie die **Friedrichssche Glättungsfunktion**. Für sie gilt

$$\operatorname{supp} \rho = \overline{B_1(0)}.$$

Dabei definieren wir:

1.4 Definition. Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist der **Träger** (engl.: support) von f, $\operatorname{supp} f$, der topologische Abschluss der Menge $\{ x \in D \mid f(x) \neq 0 \}$ in D, in Zeichen

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{ x \in D \mid f(x) \neq 0 \}} \cap D.$$

Die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{B_1(0)} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1 \}$ ist der Träger der Friedrichsschen Glättungsfunktion ϱ (was aber für allgemeine Glättungsfunktionen nicht notwendig der Fall ist).

Der nächste Konstruktionsschritt besteht nun darin, aus der Friedrichsschen Glättungsfunktion ϱ durch **Skalierung** eine einparametrige Schar von Glättungsfunktionen zu bilden, deren Masse, das ist das Integral, sich immer mehr im Nullpunkt konzentriert, aber gleich 1 bleibt. Die Träger dieser Funktionen werden immer kleiner und die Funktionen selbst werden im Nullpunkt zwangsläufig gegen $+\infty$ konvergieren. So erhalten wir eine **Approximation der Diracschen δ-Funktion**, die eigentlich keine Funktion, sondern ein Funktional ist, deren Masse 1 im Nullpunkt konzentriert ist und welche sonst überall identisch verschwindet. Wir definieren:

1.5 Definition. Eine **Dirac-Schar** der Klasse $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, wir sagen einfach eine Dirac-Schar, ist eine einparametrige Schar von Glättungsfunktionen $(\psi_\varepsilon)_{\epsilon>0}$, $\psi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, so dass $\psi_\varepsilon(x) \equiv 0$ für alle $|x| \geq \varepsilon$ und alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, gilt, das heißt, die folgenden Eigenschaften sind für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, erfüllt:

(i) $\psi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$,

(ii) $\psi_\varepsilon(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$,

(iii) $\int_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon(x)\,dx = 1$,

(iv) $\psi_\varepsilon(x) \equiv 0$ für alle $|x| \geq \varepsilon$.

1.6 Definition und Lemma. Die Funktionen $\varrho_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\varrho_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\varrho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \text{ für } x \in \mathbb{R}^n,$$

bilden für $\varepsilon > 0$ eine Dirac-Schar $(\varrho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ von Glättungsfunktionen, das heißt, sie gehören zur Klasse $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, sind nicht-negativ, es gilt $\int_{\mathbb{R}^n} \varrho_\varepsilon(x)\,dx = 1$ und sie verschwinden für $|x| \geq \varepsilon$ identisch. Wir nennen sie die **Friedrichsschen Glättungs-** oder **Glockenfunktionen** oder die **Friedrichsschen Mollifier**. Der Träger $\operatorname{supp}\varrho_\varepsilon$ von ϱ_ε ist $K_\varepsilon(0) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq \varepsilon \,\}$.

Beweis. Wir zeigen nur, dass das Integral $\int_{\mathbb{R}^n} \varrho_\varepsilon(x)\,dx$ gleich 1 ist. Die weiteren Behauptungen sind klar.

Sei $I = I_\varepsilon(0) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| \leq \varepsilon,\ i = 1, \ldots, n \,\}$. Dann ist $\operatorname{supp}\varrho_\varepsilon = K_\varepsilon(0) \subset I$. Durch sukzessive Substitution $y_1 = \frac{x_1}{\varepsilon}, \ldots, y_n = \frac{x_n}{\varepsilon}$ folgt aus dem Satz von Fubini der Riemannschen Integrationstheorie (vergleiche Analysis II, Abschnitt 5.9), dass

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \varrho_\varepsilon(x)\ dx &= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_I \varrho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \cdots \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varrho\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \ldots, \frac{x_n}{\varepsilon}\right) dx_1 \ldots dx_n \\
&= \frac{1}{\varepsilon^{n-1}}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \cdots \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\int_{-1}^{1} \varrho\left(y_1, \frac{x_2}{\varepsilon}, \ldots, \frac{x_n}{\varepsilon}\right) dy_1 dx_2 \ldots dx_n \\
&= \ldots = \int_{-1}^{1} \cdots \int_{-1}^{1} \varrho(y_1, \ldots, y_n)\, dy_1 \ldots dy_n \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \varrho(y)\, dy = 1.
\end{aligned}$$

□

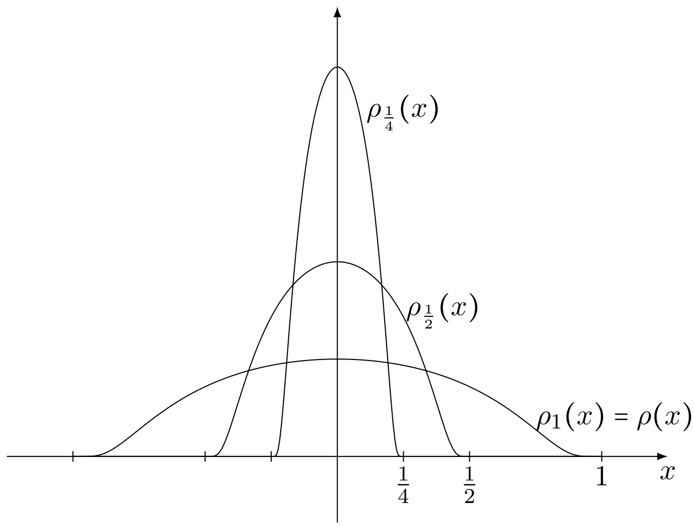

Abbildung 1.3: *Dirac-Schar*

1.2 Regularisierung

1.7 Definition. Für $f, g \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ (bzw. wann immer die Definition sinnvoll ist) definieren wir die **Faltung** von f und g durch

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Man zeigt leicht per Substitution, dass $f * g = g * f$ gilt.

Dabei haben wir die folgende Definition stillschweigend vorausgesetzt:

1.8 Definition. (i) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist

$$C_c^k(U) := \{f \in C^k(U) \,|\, \operatorname{supp} f \subset\subset U\}$$

der Raum der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger bzw. deren Träger **kompakt in U enthalten** ist, in Zeichen $\operatorname{supp} f \subset\subset U$. Dabei definieren wir allgemein:
(ii) Für $A, B \subset \mathbb{R}^n$ heißt A kompakt in B enthalten, falls $\overline{A}$ kompakt ist und $\overline{A} \subset B$ gilt.

1.9 Beispiel. Für $\epsilon > 0$ sei $\chi_{\overline{B_\epsilon(0)}}$ die Indikatorfunktion (oder auch charakteristische Funktion) der abgeschlossenen Kugel $\overline{B_\epsilon(0)}$, d.h.

$$\chi_{\overline{B_\epsilon(0)}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \leq \epsilon \\ 0 & \text{für } |x| > \epsilon \end{cases}.$$

Dann setze für $\epsilon > 0$

$$\chi_\epsilon := \frac{1}{\omega_n \epsilon^n} \chi_{\overline{B_\epsilon(0)}},$$

wobei ω_n das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel bezeichne. Die Faltung von χ_ε und f,

$$(\chi_\varepsilon \star f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(x-y) f(y)\, dy = \frac{1}{e_n \varepsilon^n} \int_{\overline{B_\epsilon(x)}} f(y)\, dy = \fint_{\overline{B_\epsilon(x)}} f(y)\, dy,$$

für $x \in \mathbb{R}^n$ ist das **Integralmittel** von f über $\overline{B_\epsilon(x)}$. Als Funktion in x aufgefasst, ist sie i.A. jedoch nicht unendlich oft differenzierbar, wie das nächste Beispiel zeigt.

Beispiel. Wir wollen die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(t) := \begin{cases} t & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

glätten, indem wir sie durch ihr Integralmittel ersetzen. In diesem eindimensionalen Fall wäre

$$f_\varepsilon(t) = \fint_{I_\varepsilon(t)} f(s)\, ds = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} f(s)\, ds$$

die Glättung, dabei ist $I_\varepsilon(t) = [t-\varepsilon, t+\varepsilon]$. Wir berechnen:

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} t & \text{für } t \geq \varepsilon \\ \frac{(t+\varepsilon)^2}{4\varepsilon} & \text{für } -\varepsilon < t < \varepsilon \\ 0 & \text{für } t \leq -\varepsilon \end{cases}$$

sowie

$$f_\varepsilon'(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq \varepsilon \\ \frac{t+\varepsilon}{2\varepsilon} & \text{für } -\varepsilon < t < \varepsilon \\ 0 & \text{für } t \leq -\varepsilon. \end{cases}$$

Die Ableitung ist offensichtlich eine stetige Funktion, aber sie ist für $t = \pm\varepsilon$ nicht weiter differenzierbar. Damit ist f_ε zwar einmal stetig differenzierbar aber nicht glatt.

Zum Glätten einer Funktion benutzen wir daher lieber:

1.10 Definition. Es sei $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$. Für $\epsilon > 0$ bezeichne ϱ_ϵ die Friedrichssche Glättungsfunktion. Dann heißt die Funktion $f^\epsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$f^\epsilon(x) := (\varrho_\epsilon \star f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varrho_\epsilon(x-y) f(y)\, dy = \frac{1}{\epsilon^n} \int_{\overline{B_\epsilon(x)}} \varrho(x-y) f(y)\, dy$$

die **Friedrichssche Glättung** oder ϵ-**Regularisierte** von f.

Es gilt nämlich:

1.11 Approximationssatz für die Friedrichssche Glättung. *Es sei $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$ und sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $f^\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und es gilt*

$$D^\alpha f^\varepsilon(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f^\varepsilon}{\partial x_n^{\alpha_n} \dots \partial x_1^{\alpha_1}}(x) = (D^\alpha \varrho_\varepsilon \star f)(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und für alle Multiindizes $\alpha = (\alpha_1, \dots \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Ist $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so gilt sogar

$$D^\alpha f^{(\varepsilon)}(x) = (\varrho_\varepsilon \star D^\alpha f)(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \leq k$, und die Konvergenz

$$D^\alpha f^{(\varepsilon)}(x) \to D^\alpha f(x) \text{ für } \varepsilon \to 0 \tag{1.1}$$

gilt kompakt gleichmäßig im $\mathbb{R}^n$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| \leq k$, das heißt, die Limesrelation (1.1) *gilt gleichmäßig in jeder kompakten Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$.*

In dem Beweis von Satz 1.11 benutzen wir einen Spezialfall des Gaußschen Integralsatzes, nämlich die partielle Integrationsregel im $\mathbb{R}^n$ (vergleiche Analysis II, Abschnitt 5.9), welche wir wie folgt wiederholen und beweisen:

Satz (Partielle Integration im $\mathbb{R}^n$). Seien $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ und $g \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq k$

$$\int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha f(x)\, g(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, D^\alpha g(x)\, dx.$$

Beweis. Durch sukzessive Integration und partielle Integration bezüglich x_1 folgt, dass

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) g(x)\, dx &= \int_{-r}^{r} \dots \int_{-r}^{r} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) g(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n \\
&= -\int_{-r}^{r} \dots \int_{-r}^{r} f(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial g}{\partial x_1}(x)\, dx,
\end{aligned}$$

weil $g(-r, x_2, \dots, x_n) = 0 = g(r, x_2, \dots, x_n)$ gilt. Ähnlich werden alle anderen Ableitungen "herübergewälzt". $\square$

Beweis von Satz 1.11. (I) . Sei $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x| \le r$ ($r > 0$ geeignet gewählt). Für $0 < \varepsilon \le 1$ gilt daher $\overline{B_\varepsilon(x)} \subset \overline{B_{r+1}(0)}$, deshalb haben wir für die Glättung f^ε die Darstellung

$$\begin{aligned} f^\varepsilon(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \varrho_\varepsilon(x-y) f(y)\, dy \\ &= \int_{\overline{B_\varepsilon(x)}} \varrho_\varepsilon(x-y) f(y)\, dy \\ &= \int_{\overline{B_{r+1}(0)}} \varrho_\varepsilon(x-y) f(y)\, dy \end{aligned}$$

mit einem von ε unabhängigen Definitionsbereich. Wir wollen nun den Satz über die Differentiation parameterabhängiger Integrale anwenden, den wir wie folgt wiederholen:

Satz über die Differentiation parameterabhängiger Integrale. Es sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $J \subset \mathbb{R}^n$ ein Jordanbereich (vgl. Analysis 2), $f : U \times J \to \mathbb{R}$ sei stetig und für festes $y \in J$ sei $f(.,y)$ stetig partiell differenzierbar in U. Dann ist die Funktion

$$F : U \to \mathbb{R},\ F(x) := \int_J f(x,y)\, dy$$

stetig partiell differenzierbar und es gilt für $i = 1, ..., n$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,y)\, dy.$$

Wir führen den Beweis von Satz 1.11 fort. Da die Voraussetzungen des Satzes über die Differentiation parameterabhängiger Integrale offenbar erfüllt sind ($\overline{B_{r+1}(0)}$ ist so z.B. offenbar ein Jordanbereich, da $\overline{B_{r+1}(0)}$ kompakt und der Rand $\partial\overline{B_{r+1}(0)}$ eine Lebesguesche Nullmenge ist), gilt für $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial x_i}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial(\varrho_\varepsilon(x-y))}{\partial x_i} f(y)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \varrho_\varepsilon}{\partial x_i}(x-y) f(y)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} D_i \varrho_\varepsilon(x-y) f(y)\, dy. \end{aligned}$$

Wiederholtes Differenzieren (formal mit vollständiger Induktion zu beweisen!) liefert

$$D^\alpha f^{(\varepsilon)}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha \varrho_\varepsilon(x-y) f(y) dy = (D^\alpha \varphi_\varepsilon \star f)(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

(II) Für $i = 1, \dots, n$ gilt nach der Kettenregel

$$\frac{\partial(\varrho_\varepsilon(x-y))}{\partial y_i} = -\frac{\partial(\varrho_\varepsilon(x-y))}{\partial x_i} = -D_i\varrho_\varepsilon(x-y),$$

weshalb (vollständige Induktion!)

$$D_y^\alpha\left(\varrho_\varepsilon(x-y)\right) = (-1)^{|\alpha|}D_x^\alpha(\varrho_\varepsilon(x-y)) = (-1)^{|\alpha|}D^\alpha\varrho_\varepsilon(x-y)$$

für alle $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, dabei ist $D_y^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial y_n^{\alpha_n} \dots \partial y_1^{\alpha_1}}$ und natürlich $D_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_n^{\alpha_n} \dots \partial x_1^{\alpha_1}}$. Also folgt durch partielle Integration für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $|\alpha| \leq k$, dass

$$\begin{aligned} D^\alpha f^\varepsilon(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha\varrho_\varepsilon(x-y)f(y)\,dy \\ &= (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n} D_y^\alpha\left(\varrho_\varepsilon(x-y)\right)f(y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varrho_\varepsilon(x-y)D^\alpha f(y)\,dy \\ &= (\varrho_\varepsilon \star D^\alpha f)(x). \end{aligned}$$

(III) Für $x \in \mathbb{R}^n$ schätzen wir ab:

$$\begin{aligned} \left|f^{(\varepsilon)}(x) - f(x)\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \varrho_\varepsilon(x-y)f(y)\,dy - f(x)\int_{\mathbb{R}^n} \varrho_\varepsilon(x-y)\,dy\right| \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \varrho_\varepsilon(x-y)(f(y)-f(x))\,dy\right| \\ &\leq \int_{K_\varepsilon(x)} \varrho_\varepsilon(x-y)\left|f(y)-f(x)\right|\,dy \\ &\leq \max_{y\in K_\varepsilon(x)}\left|f(y)-f(x)\right|\int_{K_\varepsilon(x)} \varrho_\varepsilon(x-y)\,dy \\ &= \max_{y\in K_\varepsilon(x)}\left|f(y)-f(x)\right|. \end{aligned}$$

Wir wollen nun zeigen, dass die Konvergenz kompakt gleichmäßig ist. Dazu können geben wir eine beliebige kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ vor, von der wir o.B.d.A. annehmen können, dass sie von der Gestalt $K = \overline{B_0(r)}$ mit einem gewissen $r > 0$ ist.

Sei $\eta > 0$. Dann gibt es wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f in der kompakten Menge $\overline{B_{r+1}(0)}$ ein $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta)$, so dass

$$|f(y) - f(x)| \leq \eta \text{ für alle } x \in \overline{B_r(0)} \text{ und } y \in \overline{B_{r+1}(0)} \text{ mit } |y - x| < \varepsilon_0,$$

weshalb

$$\max_{y \in \overline{B_\epsilon(x)}} |f(y) - f(x)| \le \eta \text{ für alle } x \in \overline{B_r(0)}$$

und für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$. Also konvergiert f^ε gleichmäßig gegen f in $\overline{B_r(0)}$. Zusammen mit Teil (II) folgt die behauptete kompakt gleichmäßige Konvergenz von $D^\alpha f^\varepsilon$ gegen $D^\alpha f$ im $\mathbb{R}^n$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| \le k$. □

1.12 Bemerkung. *Aus dem Beweis von Satz 1.11 ergibt sich:*
Sei $f \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $f^\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ für $\epsilon > 0$ und die Konvergenz

$$D^\alpha f^\varepsilon \to D^\alpha f \textit{ für } \varepsilon \to 0$$

gilt gleichmäßig im $\mathbb{R}^n$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| \le k$.

Wir erwähnen noch einen Approximationssatz für Funktionen, die lediglich in einer offenen Teilmenge U des $\mathbb{R}^n$ erklärt sind. Der Beweis von Satz 1.11 kann weitgehend übernommen werden.

1.13 Satz. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und sei $f \in C^0(U)$. In jeder kompakt in U enthaltenen offenen Teilmenge U', das heißt $U' \subset\subset U$, ist dann die Friedrichssche Glättung $f^\varepsilon(x)$ für $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(U', \partial U)$ (falls $\partial U = \emptyset$, so setze $\operatorname{dist}(U', \partial U) := +\infty$) erklärt und es gilt $f^\varepsilon \in C^\infty(U')$ sowie*

$$D^\alpha f^\varepsilon(x) = (D^\alpha \varrho_\varepsilon \star f)(x) = \int_U D^\alpha \varrho_\varepsilon(x-y) f(y)\, dy$$

für alle $x \in U'$ und alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Ist $f \in C^k(U)$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so ist

$$D^\alpha f^\varepsilon(x) = (\varrho_\varepsilon \star D^\alpha f)(x) = \int_U \varrho_\varepsilon(x-y) D^\alpha f(y)\, dy$$

für alle $x \in U'$ und alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| \le k$, und die Konvergenz

$$D^\alpha f^\varepsilon \to D^\alpha f \textit{ für } \varepsilon \to 0$$

gilt gleichmäßig in U' für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| \le k$.

1.3 Die Partition der Eins

Durch elementare und explizite Konstruktion aus der Ausgangsfunktion $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\phi(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t \le 0 \end{cases}$$

beziehungsweise aus der Friedrichsschen Glockenfunktion $\varrho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\varrho(r) = \frac{1}{c_1}\phi(1-r^2) = \frac{1}{c_1}\begin{cases} e^{\frac{1}{r^2-1}} & \text{für } |r| < 1 \\ 0 & \text{für } |r| \geq 1, \end{cases}$$

dabei ist $c_1 = \int_{\mathbb{R}} \phi(1-r^2)\,dr = \int_{-1}^{1} e^{\frac{1}{r^2-1}}\,dr$, und der dazugehörigen Dirac-Schar $(\varrho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, $\varrho_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\varrho_\varepsilon(r) = \frac{1}{\varepsilon}\,\varrho\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \text{ für } r \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0,$$

gewinnen wir nun einige weitere nützliche Funktionen für unsere Werkzeugkiste:

1.14 Lemma. *Seien $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $0 < r_1 < r_2 < +\infty$. Dann gibt es eine Funktion $\psi = \psi_{r_1,r_2} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$,

(ii) $0 \leq \psi(x) \leq 1$ *für* $x \in \mathbb{R}^n$,

(iii) $\operatorname{supp}\psi = \overline{B_{r_2}(0)}$,

(iv) $\psi(x) = 1$ *für* $|x| \leq r_1$,

(v) $|\frac{\partial\psi}{\partial x_i}(x)| \leq \frac{2}{c_1(r_2-r_1)}$ *für* $r_1 < |x| < r_2$, $i = 1, \ldots, n$,

dabei ist $c_1 = \int_{-1}^{1} e^{\frac{1}{r^2-1}}\,dr$.

Beweis. Wir betrachten die Dirac-Schar der Friedrichsschen Glättungsfunktionen $(\varrho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$,

$$\varrho_\varepsilon(r) = \frac{1}{\varepsilon}\,\varrho\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \text{ für } r \in \mathbb{R}\,,\ \varepsilon > 0,$$

setzen $\varepsilon := \frac{r_2-r_1}{2}$ und bilden die Glockenfunktion

$$\begin{aligned} \varrho_{r_1,r_2}(r) &:= \varrho_{\frac{r_2-r_1}{2}}\left(r - \frac{r_1+r_2}{2}\right) \\ &= \frac{2}{r_2-r_1}\,\varrho\left(\frac{2r-(r_1+r_2)}{r_2-r_1}\right). \end{aligned}$$

Dann gilt $\varrho_{r_1,r_2} \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leq \varrho_{r_1,r_2}(x) < +\infty$ für $x \in \mathbb{R}^n$, $\operatorname{supp}\varrho_{r_1,r_2} = [r_1, r_2]$ und $\int_{\mathbb{R}} \varrho_{r_1,r_2}(r)\,dr = 1$. Die Funktion

$$\psi(x) = \psi_{r_1,r_2}(x) := 1 - \int_0^{|x|} \varrho_{r_1,r_2}(r)\,dr \text{ für } x \in \mathbb{R}^n.$$

leistet dann das Gewünschte. Es gilt

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_i}(x) = \begin{cases} -\varrho_{r_1,r_2}(x)\frac{x_i}{|x|} & \text{für } r_1 < |x| < r_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für $i = 1,\dots,n$. Daraus folgt für $i = 1,\dots,n$

$$\Big|\frac{\partial\psi}{\partial x_i}(x)\Big| \le \Big|\varrho_{r_1,r_2}(x)\frac{x_i}{|x|}\Big| \le \frac{2e^{-1}}{(r_2-r_1)c_1} \le \frac{2}{(r_2-r_1)c_1}.$$

$\square$

1.15 C^∞-Partition der Eins. *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und $\mathcal{U}$ ein offenes Überdeckungssystem von K, d.h. eine Familie von offenen Mengen, die K überdecken. Dann gibt es Funktionen $\psi_1,\dots\psi_N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, so dass für alle $i = 1,\dots,N$ die folgenden Eigenschaften gelten:*

(i) $\psi_i \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(ii) $0 \le \psi_i(x) \le 1$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^n$.

(iii) *Es gibt ein* $U \in \mathcal{U}$, *so dass* $\operatorname{supp}\psi_i \subset U$.

(iv) $\sum_{i=1}^N \psi_i(x) = 1$ *für alle* $x \in K$.

1.16 Definition. Wegen der Eigenschaft (iv) heißt das System $\{\psi_1,\dots,\psi_N\}$ eine **Partition** oder **Zerlegung der Eins** und wegen (iii) heißt $\{\psi_1,\dots,\psi_N\}$ eine **der Überdeckung $\mathcal{U}$ untergeordnete Partition der Eins.**

Beweis von Satz 1.15. (I) Zunächst wählen wir zu jedem $x \in K$ ein $U = U(x) \in \mathcal{U}$ und offene Kugeln $V(x)$, $W(x)$ mit

$$V(x) \subset\subset W(x) \subset\subset U(x).$$

Dann ist $\mathcal{V} := \{\, V(x) \mid x \in K \,\}$ ein offenes Überdeckungssystem von K und weil K kompakt ist, gibt es nach dem Heine-Borelschen Überdeckungssatz endlich viele Punkte $x_1,\dots,x_N \in K$ mit

$$K \subset \bigcup_{i=1}^N V(x_i).$$

Aufgrund von Lemma 1.14 gibt es Funktionen $\phi_1,\dots,\phi_N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, so dass für alle $i = 1,\dots,N$:

(a) $\phi_i \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$,

(b) $0 \leq \phi_i(x) \leq 1$ für $x \in \mathbb{R}^n$,

(c) $\operatorname{supp} \phi_i = \overline{W(x_i)}$,

(d) $\phi_i(x) = 1$ für $x \in \overline{V(x_i)}$.

(II) Sei

$$\psi_1(x) := \phi_1(x),\ \psi_i(x) := (1 - \phi_1(x)) \cdot \ldots \cdot (1 - \phi_{i-1}(x))\phi_i(x)$$

für $i \in \{ 2, \ldots, N \}$. Dann sind die behaupteten Eigenschaften (i)-(iii) offensichtlich erfüllt. Durch vollständige Induktion über $k \in \{ 1, \ldots, N \}$ zeigen wir, dass

$$\sum_{i=1}^{k} \psi_i(x) = 1 - \prod_{i=1}^{k} (1 - \phi_i(x)) \text{ für } x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.2}$$

Für $k = 1$ ist dies klar. Falls (1.2) für ein $k < N$ richtig ist, so folgt durch Addition von (1.2) und

$$\psi_{k+1}(x) = (1 - \phi_1(x)) \cdot \ldots \cdot (1 - \phi_k(x))\phi_{k+1}(x),$$

dass

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} \psi_i(x) &= 1 - \prod_{i=1}^{k} (1 - \phi_i(x)) + \prod_{i=1}^{k} (1 - \phi_i(x))\phi_{k+1}(x) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{k} (1 - \phi_i(x))(1 - \phi_{k+1}(x)) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{k+1} (1 - \phi_i(x)), \end{aligned}$$

und daher ist (1.2) bewiesen.

Falls $x \in K$ ist, dann gibt es ein $i \in \{ 1, \ldots, N \}$ mit $x \in V(x_i)$, also gilt $\phi_i(x) = 1$. Deshalb ist

$$\prod_{i=1}^{N} (1 - \phi_i(x)) = 0 \text{ für } x \in K,$$

weshalb

$$\sum_{i=1}^{N} \psi_i(x) = 1 \text{ für } x \in K$$

wie behauptet. $\square$