2 Differenzierbare Untermannigfaltigkeiten

2.1 d-dimensionale Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$

2.1 Definition. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt ***d*-dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit (reguläre Fläche) des $\mathbb{R}^n$** ($d = 1, \ldots, n-1$), wenn es für jeden Punkt $a \in M$ eine offene Umgebung $U = U(a) \subset \mathbb{R}^n$ und eine Abbildung $f = (f_1, \ldots, f_{n-d}) \in C^1(U, \mathbb{R}^{n-d})$ gibt, so daß

(i) $M \cap U = \{x \in U | \, f(x) = 0\}$,

(ii) der Rang der Funktionalmatrix von f im Punkte a,

$$Df(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial f_{n-d}}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_{n-d}}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

ist maximal, d.h., gleich $n - d$. D.h., M läßt sich lokal als **Nullstellenmenge** von $n - d$ C^1-Funktionen von n Variablen mit linear unabhängigen Gradienten schreiben.

2.2 Bemerkungen. (i) Wegen der Bedingung (ii) heißt die Fläche regulär, sie bedeutet, daß die Gradienten

$$\nabla f_1(a), \ldots, \nabla f_{n-d}(a)$$

linear unabhängig sind.

(ii) Die $p = 1$-dimensionalen Untermannigfalten des $\mathbb{R}^n$ heißen **reguläre Kurven**, sie werden üblicherweise in **parametrischer Darstellung** angegeben (siehe Abschnitt 2.2).

(iii) Die offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ sind die n-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$.

(iv) Der Fall $p = n-1$ ist besonders wichtig, ihn wollen wir vor allem betrachten. $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ heißen auch **reguläre**

Hyperflächen, sie sind lokal als Nullstellenmenge einer Funktion f mit $\nabla f \neq 0$ erklärt.

2.3 Beispiel. (a) Die 2–dimensionale Ebene

$$E := \{(x_1, x_2, 0, 0)\ | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

ist eine 2–dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^4$. Um Dieses einzusehen, wähle zu $a \in E$ $U(a) := \mathbb{R}^4$ und

$$f_1 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, f_1(x) :=< x, e^3 >= x_3,$$
$$f_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, f_2(x) :=< x, e^4 >= x_4.$$

Es gilt $E = \{x \in \mathbb{R}^4 \,|\, (f_1(x), f_2(x) = (0,0)\}$ und außerdem

$$Df(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_4}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_4}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

so dass rang $Df(a) = 2$ (maximal).
(b) Ein weiteres Beispiel ist die **$(n-1)$-dimensionale Einheitsphäre S^{n-1}**,

$$\begin{aligned} S^{n-1} &:= \{x \in \mathbb{R}^n | \, |x| = 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n | \, f(x) = 0\}\ , \end{aligned}$$

wobei

$$f(x) := x_1^2 + \ldots + x_n^2 - 1\ .$$

Es gilt

$$\nabla f(x) = (2x_1, \ldots, 2x_n) = 2x \neq 0$$

für alle $x \in S^{n-1}$.

2.4 Satz. *Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine d-dimensionale Untermannigfaltigkeit genau dann, wenn es zu jedem Punkt $a \in M$ nach eventueller Umnumerierung der Koordinaten offene Umgebungen*

$$\begin{aligned} &U' = U'(a') \subset \mathbb{R}^d && \textit{von } a' = (a_1, \ldots, a_d), \\ &U'' = U''(a'') \subset \mathbb{R}^{n-d} && \textit{von } a'' = (a_{d+1}, \ldots, a_n) \end{aligned}$$

und eine Abbildung $g \in C^1(U', U'')$ gibt, so daß

$$M \cap (U' \times U'') = \{(x', x'') \in U' \times U'' | x'' = g(x')\}\ ,$$

d.h., M läßt sich lokal als **Graph** *von $n-d$ C^1-Funktionen von d Variablen schreiben.*

Beweis. (I) „$\Leftarrow$" Angenommen, M läßt sich lokal als Graph von $g : U' \to U''$ schreiben. Dann sei $U := U' \times U''$ und $f = (f_1, \ldots, f_{n-d}) : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ definiert durch

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \ldots, x_n) &:= g_1(x_1, \ldots, x_d) - x_{d+1} \\ &\vdots \\ f_{n-d}(x_1, \ldots, x_n) &:= g_{n-d}(x_1, \ldots, x_d) - x_n\,. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$M \cap U = \{x \in U | \, f(x) = 0\},$$

und der Rang von

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_d} & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & 0 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \\ & & & & & & 0 \\ \frac{\partial g_{n-d}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_{n-d}}{\partial x_d} & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ist offensichtich $\neq 0$, also ist M eine d-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

(II) „$\Rightarrow$" Sei $U = U(a)$ eine offene Umgebung von $a \in M$ und $f = (f_1, \ldots, f_{n-d}) \in C^1(U, \mathbb{R}^{n-d})$ mit

(I) $$M \cap U = \{x \in U | \, f(x) = 0\}\,,$$

(II) der Rang der von $Df(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial f_{n-d}}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_{n-d}}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$ ist gleich $n - d$.

Nach eventueller Umnumerierung der Koordinaten können wir annehmen, daß

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{d+1}}(a) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial f_{n-d}}{\partial x_{d+1}}(a) & \ldots & \frac{\partial f_{n-d}}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \neq 0$$

gilt.

Aufgrund des Satzes über implizite Funktionen kann das Gleichungssystem $f(x) = 0$ lokal nach $x'' = (x_{d+1}, \ldots, x_n)$ aufgelöst werden: Wir erhalten offene Umgebungen

$$\begin{aligned} U' &= U'(a') \quad \text{von } a' = (a_1, \ldots, a_d), \\ U'' &= U''(a'') \ \text{von } a'' = (a_{d+1}, \ldots, a_n) \end{aligned}$$

und eine auflösende Abbildung $g \in C^1(U', U'')$, so daß $U' \times U'' \subset U$ und

$$\begin{aligned} M \cap (U' \times U'') &= \{(x', x'') \in U' \times U'' | \, f(x) = 0\} \\ &= \{(x', x'') \in U' \times U'' | \, x'' = g(x')\}\,. \end{aligned}$$

□

2.5 Beispiel. Ist $a \in S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x| = 1\}$ ein Punkt der $(n-1)$-dimensionalen Einheitssphäre im $\mathbb{R}^n$ mit $a_n > 0$, so sei

$$U' = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} \,|\, |x'| < 1\}$$

und

$$g : U' \to (0, +\infty)$$

definiert durch

$$g(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \sqrt{1 - x_1^2 - \ldots - x_{n-1}^2} \,.$$

Dann ist

$$S^{n-1} \cap \left(\mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty)\right) = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_n = g(x')\} \,.$$

2.6 Satz. *Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine d-dimensionale Untermannigfaltigkeit, wenn es zu jedem Punkt $a \in M$ offene Umgebungen $U = U(a) \subset \mathbb{R}^n$, $V = V(0) \subset \mathbb{R}^n$ und einen Diffeomorphismus $F : U \to V$ gibt, so daß*

$$F(M \cap U) = \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, y_{d+1} = \ldots = y_n = 0\} \cap V,$$

d.h., durch eine lokale Koordinatentransformation der Klasse C^1 des umgebenden Raumes läßt sich M zu einer ***d*-dimensionalen Ebene im $\mathbb{R}^n$** *geradebiegen.*

Beweis. (I) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine d-dimensionale Untermannigfaltigkeit. In einer Umgebung von $a \in M$ sei M wie in Satz 2.4 als Graph dargestellt:

$$M \cap (U' \times U'') = \{(x', x'') \in U' \times U'' \,|\, x'' = g(x')\} \,.$$

Dann sei $U := U' \times U''$ und

$$F : U \to \mathbb{R}^n$$

definiert durch

$$F(x', x'') := (x', x'' - g(x')) \,,$$

d.h. $y' = x'$, $y'' = x'' - g(x') = x'' - g(x')$. Dann ist die Inverse gegeben durch

$$F^{-1}(y', y'') := (y', y'' + g(y'))$$

auf $V := F(U)$, welches eine offene Menge ist, weil z.B.

$$DF(x) = 1 \neq 0 \qquad \text{für alle} \quad x \in U$$

gilt. Daher ist $F : U \to V$ ein Diffeomorphismus mit

$$F(M \cap U) = \{y \in V | y'' = 0\} \,.$$

(II) Sei umgekehrt
$$F : U \to V$$
ein Diffeomorphismus mit
$$F(M \cap U) = \{y \in V | y_{d+1} = \ldots = y_n = 0\} .$$
Dann gilt
$$\begin{aligned} M \cap U &= F^{-1}\{y \in V|\, y_{d+1} = \ldots = y_n = 0\} \\ &= \{x \in U|\, F_{d+1}(x) = \ldots = F_n(x) = 0\} , \end{aligned}$$
und der Rang von
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_{d+1}}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial F_{d+1}}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$
ist natürlich maximal, also gleich $n - d$, weil
$$\det DF(a) \neq 0$$
gilt. Also ist M eine d-dimensionale Untermannigfaltigkeit. □

2.2 Immersionen und Parameterdarstellung

2.7 Definition. Es sei $T \subset \mathbb{R}^d, d \leq n$, eine offene Menge. Eine Abbildung $X = (x_1, \ldots, x_n) \in C^1(T, \mathbb{R}^n)$ heißt **regulär** oder **Immersion (reguläre parametrische Fläche),** falls der Rang der Funktionalmatrix
$$DX(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial t_1}(t) & \ldots & \frac{\partial X_1}{\partial t_d}(t) \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial X_n}{\partial t_1}(t) & \ldots & \frac{\partial X_n}{\partial t_d}(t) \end{pmatrix}$$
für alle $t \in T$ maximal, d.h., gleich d ist.

2.8 Bemerkungen. (i) Die **Spur** von X, $X(T)$, kann Selbstdurchschneidungen haben.

(ii) Gilt zusätzlich, daß $X : T \to$ Spur (X) ein Homöomorphismus ist, d.h. X ist stetig, bijektiv mit stetiger Inverser, so heißt X **Einbettung**.

(iii) Im Fall $d = 1$ heißt X eine **reguläre parametrische Kurve.**

2.9 Satz. *Sei $X \in C^1(T, \mathbb{R}^n)$ eine Immersion. Dann gibt es zu jedem $t_o \in T$ eine offene Umgebung $T_0 = T_0(t_0) \subset T \subset \mathbb{R}^d$, so daß $X_{|T_0}$ eine Einbettung und $X(T_0)$ eine d-dimensionale (differenziebare) Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist.*

Beweis. O.B.d.A. sei

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial t_1}(t_0) & \dots & \frac{\partial X_1}{\partial t_d}(t_0) \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial X_d}{\partial t_1}(t_0) & \dots & \frac{\partial X_d}{\partial t_d}(t_0) \end{pmatrix} \neq 0 \, .$$

Dann gibt es nach dem Satz 4.2.9 über inverse Abbildungen offene Umgebungen $T_0 = T_0(t_0) \subset T \subset \mathbb{R}^d$ und $U' = U'(X'(t_0)) \subset \mathbb{R}^d \quad X' = (x_1, \dots, x_d)$, so daß

$$X' = (x_1, \dots, x_d) : T_0 \to U'$$

ein Diffeomorphismus ist.

Wir betrachten die Abbildung

$$G : T_0 \times \mathbb{R}^{n-d} \to U' \times \mathbb{R}^{n-d} \, ,$$
$$G(t', t'') := (X'(t'), X''(t') + t'') \, ,$$

d. h., für $t = (t', t'') \in T_0 \times \mathbb{R}^{n-d}$ gilt

$$\begin{aligned} G_1(t) &:= X_1(t') \\ &\vdots \\ G_d(t) &:= X_d(t') \\ G_{d+1}(t) &:= X_{d+1}(t') + t_{d+1} \\ &\vdots \\ G_n(t) &:= X_n(t') + t_n \, . \end{aligned}$$

Dann ist $G(T_0 \times \mathbb{R}^{n-d}) = U' \times \mathbb{R}^{n-d}$, denn für $x \in U' \times \mathbb{R}^{n-d}$ sei $t' = t'(x')$ und $t'' := x'' - x''(t')$. Dann gilt

$$\begin{aligned} G(t', t'') &= (X'(t'), X''(t') + t'') \\ &= (x', x'') \, . \end{aligned}$$

Außerdem ist G injektiv und ein Diffeomorphismus. Weiterhin gilt

$$G(T_0 \times \{0\}) = X(T_0) \, .$$

Aus Satz 2.6 folgt, daß $X(T_0)$ eine d-dimensionale Untermannigfaltigkeiti. Außerdem ist für $t \in T_0$

$$X(t) = G(t, 0),$$

also bildet $X \quad T_0$ homöomorph auf $X(T_0)$ ab. □

Es gilt tatsächlich die folgende Äquivalenzaussage. Somit hätte man die d–dimensionalen Untermannigfaltigkeiten auch über die lokale Parametrisierbarkeit mit Hilfe einer Einbettung definieren können.

2.10 Satz (Parameterdarstellung)**.** *Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine d-dimensionale Untermannigfaltigkeit genau dann, wenn es zu jedem Punkt $a \in M$ eine offene Umgebung $U = U(a) \subset \mathbb{R}^n$, eine offene Teilmenge $T \subset \mathbb{R}^d$ und eine Immersion $X \in C^1(T, \mathbb{R}^n)$ gibt, so daß*

$$X : T \to M \cap U$$

ein Homöomorphismus, also eine Einbettung ist.

Beweis. (I) „$\Leftarrow$“ Sei $a \in M$ und $t_0 := X^{-1}(a)$. Aufgrund von Satz 2.9 existiert eine Umgebung $T_0 = T_0(t_0) \subset T$, so daß $X(T_0)$ eine d-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist. Weil $X : T \to M \cap U$ ein Homöomorphismus ist, ist $X(T_0)$ relativ offen in $M \cap U$, daher existiert eine offene Umgebung $U_0 = U_0(t_0) \subset U$, so daß

$$X(T_0) = M \cap U_0$$

gilt. Daher ist $M \cap U_0$, und also auch M, eine d-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

(II) „$\Rightarrow$“ Aufgrund von Satz 2.4 können wir M in einer Umgebung $U = U' \times U''$ von $a \in M$ als Graph schreiben:

$$M \cap U = \{(x', x'') \in U | \, x'' = g(x')\} .$$

Setzen wir $T := U'$ und

$$X : T \to \mathbb{R}^n, \; X(t) := (t, g(t)),$$

so ist X eine Immersion, und

$$X : T \to M \cap U$$

ist offensichtlich ein Homöomorphismus. □

2.11 Bemerkung. Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine d–dimensionale Untermannigfaltigkeit, so existiert i.A. keine Immersion $X \in C^1(T, \mathbb{R}^n)$, T offen im $\mathbb{R}^d$, so daß

$$(\star) \quad X : T \to M \text{ Homöomorphismus.}$$

Als Beispiel hierzu sei die Einheitssphäre genannt. Wir nehmen an, dass doch ein solcher Homöomorphismus existiert wie in $(\star)$ mit $M = S^{n-1}$. S^{n-1} ist kompakt. Als homöomorphes Bild unter X^{-1} von S^{n-1} ist damit auch T kompakt bzgl. der Relativtopologie in T, d.h. bzgl. der Topologie der offenen Mengen im $\mathbb{R}^d$, die mit

T geschnitten werden. Man verifiziert leicht, dass Dieses gleichbedeutend mit der Kompaktheit bzgl. der erwähnten gewöhnlichen Topologie der offenen Mengen im $\mathbb{R}^d$ ist. Inbesondere ist T abgeschlossen als kompakte Menge. Da $\mathbb{R}^d$ jedoch zusammenhängend ist, T offen nach Voraussetzung und abgeschlossen und $T \neq \emptyset$ (da die Sphäre sonst nicht überdeckt werden könnte), folgt $T = \mathbb{R}^d$, was einen Widerspruch zur Kompaktheit von T darstellt. Also war obige Annahme falsch.

2.12 Definition. Die Abbildung $X : T \to M \cap U$ heißt **(reguläre) Parametrisierung** oder **Karte** von M und wird auch mit $(X, M \cap U)$ bezeichnet. T heißt **Parameterbereich** und $M \cap U$ **Koordinatenumgebung von $a \in M$**.

Schließlich notieren wir noch, dass die Parameterwechsel zwischen zwei Karten Diffeomorphismen sind:

2.13 Satz (Parameterwechsel)**.** *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine d-dimensionale Untermannigfaltigkeit und seien $X : T \to M \cap U$ und $Y : S \to M \cap V$ zwei Karten der Klasse C^1 mit $M \cap W = M \cap (U \cap V) \neq \emptyset$. Dann sind $X^{-1}(M \cap W)$ und $Y^{-1}(M \cap W)$ offene Teilmengen von T bzw. S und der* **Parameterwechsel**

$$Y^{-1} \circ X : X^{-1}(M \cap W) \to Y^{-1}(M \cap W)$$

ist ein Diffeomorphismus.

Beweis. (I) $X^{-1}(M \cap W) \subset T$ ist offen, da $M \cap W \subset M$ relativ offen und $X : T \to M \cap U$ ein Homöomorphismus ist. Genauso ist $Y^{-1}(M \cap W) \subset S$ offen. Als Komposition von Homöomorphismen ist

$$Y^{-1} \circ X : X^{-1}(M \cap W) \to Y^{-1}(M \cap W)$$

ein Homöomorphismus.

(II) Sei $a \in M \cap W$ und $t_0 = X^{-1}(a), s_0 = Y^{-1}(a)$. Da M lokal diffeomorph zu einer Ebene ist, gibt es nach Satz 2.6 offene Umgebungen $W(a) \subset W \subset \mathbb{R}^n$, $\tilde{W} \subset \mathbb{R}^n$ und einen Diffeomorphismus

$$F : W(a) \to \tilde{W} ,$$

so daß

$$F(M \cap W(a)) = \{y \in \tilde{W} | y_{d+1} = \ldots = y_n = 0\} .$$

Wir nehmen o.B.d.A. an, daß $W(a) = W$ gilt. Auf $X^{-1}(M \cap W)$ bzw. $Y^{-1}(M \cap W)$ gilt dann

$$\begin{aligned} F \circ X &= (g_1, \ldots, g_d, 0, \ldots, 0) = (g, 0), \\ F \circ Y &= (h_1, \ldots, h_d, 0, \ldots, 0) = (h, 0) . \end{aligned}$$

Weiter haben die Funktionalmatrizen

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial t_1}(t_0) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial t_d}(t_0) \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial g_d}{\partial t_1}(t_0) & \dots & \frac{\partial g_d}{\partial t_d}(t_0) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial s_1}(s_0) & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial s_d}(s_0) \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial h_d}{\partial s_1}(s_0) & \dots & \frac{\partial h_d}{\partial s_d}(s_0) \end{pmatrix}$$

maximalen Rang d, da DF den Rang n und DX und DY den Rang d haben. Also sind

$$(g,0) : X^{-1}(M \cap W) \to \{y \in \tilde{W} | y_{d+1} = \ldots = y_n = 0\} ,$$

$$(h,0) : Y^{-1}(M \cap W) \to \{\ldots\}$$

Diffeomorphismen. Auf $X^{-1}(M \cap W)$ gilt aber

$$Y^{-1} \circ X = (F \circ Y)^{-1} \circ (F \circ X) = (h,0)^{-1} \circ (g,0),$$

deshalb ist $Y^{-1} \circ X$ als Komposition zweier Diffeomorphismen in Diffeomorphismus. □

2.3 Tangential- und Normalenräume

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine d-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

2.14 Definition. Unter einem **Tangentialvektor** $v \in \mathbb{R}^n$ an M im Punkte $a \in M$ verstehen wir den Tangentialvekor $v = \gamma'(0)$ einer in M verlaufenden C^1-Kurve

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \quad \text{mit} \quad \gamma(0) = a\,.$$

Der **Tangentialraum** T_aM an M in a besteht aus allen Tangentialvektoren an M im Punkte a.

Wir werden im Folgenden zeigen, dass T_aM ein d–dimensionaler vektorraum ist. dazu benötigen wir allerdings zuerst folgendes Lemma:

2.15 Lemma (Liftungslemma)**.** *Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\gamma : I \to M \cap U$ eine C^1-Kurve. Dann gibt es eine C^1-Kurve*

$$c : I \to T$$

mit $\gamma = X \circ c$.

Beweis. Es gilt $\gamma = X \circ (X^{-1} \circ \gamma)$, daher ist nur zu zeigen, daß

$$c := X^{-1} \circ \gamma : I \to T$$

eine C^1-Kurve ist:
Aufgrund von Satz 2.6 gibt es einen Diffeomorphismus

$$F : U \to V ,$$

so daß

$$F(M \cap U) = \{y \in V | y_{d+1} = \ldots = y_n = 0\} .$$

Hier nehmen wir o.B.d.A. an, daß U nicht verkleinert werden muß, und $V \subset \mathbb{R}^n$ ist eine offene Menge. Wie im Beweis von Satz 2.13 gilt

$$F \circ X = (g_1, \ldots, g_d, 0, \ldots 0) = (g, 0)$$

auf T mit rang $Dg = d$. Also ist $(g, 0) : T \to V \cap \{y_{d+1}, \ldots, y_n = 0\}$ ein Diffeomorphismus. Daher ist

$$c = X^{-1} \circ \gamma = (X^{-1} \circ F^{-1}) \circ (F \circ \gamma) = (F \circ X)^{-1} \circ (F \circ \gamma) = (g, 0)^{-1} \circ F \circ \gamma$$

als Komposition von C^1-Abbildungen eine C^1-Kurve. □

2.16 Satz. *Es seien $a \in M$, $U = U(a) \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von a, und $X : T \to M \cap U$ sei eine Karte von M. Weiter sei $t_0 \in T$ mit $X(t_0) = a$. Dann ist T_aM der von den Vektoren $D_1X(t_0) = \frac{\partial X}{\partial t_1}(t_0), \ldots, D_dX(t_0) = \frac{\partial X}{\partial t_d}(t_0)$ aufgespannte d-dimensionale Vektorraum,*

$$T_aM = \operatorname{span}\{D_1X(t_0), \ldots, D_dX(t_0)\},$$

d.h., die Vektoren $D_1X(t_0), \ldots, D_dX(t_0)$ bilden eine Basis von T_aM, d.h., T_aM ist das Bild $\operatorname{Im}(DX_{t_0})$ des Differentials $DX_{t_0} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$.

Beweis. (I) Aufgrund der Rangbedingung

$$\operatorname{rang} DX(t_0) = d$$

sind die Vektoren $D_1X(t_0), \ldots, D_dX(t_0)$ linear unabhängig, der Vektorraum

$$\operatorname{span}\{D_1X(t_0), \ldots, D_dX(t_0)\}$$

hat also die Dimension d.
(II) Wir zeigen $\operatorname{span}\{D_1X(t_0), \ldots, D_dX(t_0)\} \subset T_aM$:

Ist $v := v_1 D_1 X(t_0) + \ldots + v_d D_d X(t_0)$, $v_1, \ldots v_d \in \mathbb{R}$, so sei

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \cap U$$

definiert durch

$$\gamma(\tau) := X(t_0 + \tau v) .$$

Falls $\varepsilon > 0$ klein genug ist, gilt $t_0 + \tau v \in T$ (da T offen), d.h., γ ist eine wohldefinierte C^1-Kurve, und es gilt $\gamma(0) = X(t_0) = a$.

Nach der Kettenregel gilt ferner:

$$\gamma'(0) = \frac{\partial X}{\partial t_1}(t_0)v_1 + \ldots + \frac{\partial X}{\partial t_d}(t_0)v_d = v .$$

(III) Es sei $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \cap U$ eine C^1-Kurve mit $\gamma(0) = a$. Aufgrund des Lemmas 2.15 ist

$$c := X^{-1} \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to T$$

eine C^1-Kurve mit $c(0) = t_0$. Nach der Kettenregel gilt

$$\begin{aligned} \gamma'(0) &= (X \circ c)'(0) \\ &= \frac{\partial X}{\partial t_1}(t_0)\,\frac{dc_1}{d\tau}(0) + \ldots + \frac{\partial X}{\partial t_d}(t_0)\,\frac{dc_d}{d\tau}(0) \\ &= v_1 D_1 X(t_0) + \ldots + v_d D_d X(t_0), \end{aligned}$$

also gilt

$$T_a M \subset \operatorname{span}\{D_1 X(t_0), \ldots, D_d X(t_0)\}.$$

□

2.17 Korollar. *Es sei $a \in M$, und $U = U' \times U''$ sei eine offene Zylinderumgebung von $a = (a', a'')$, $U' = U'(a') \subset \mathbb{R}^d$, $U'' = U''(a'') \subset \mathbb{R}^{n-d}$, so daß*

$$M \cap U = \{(x', x'') \in U | \, x'' = g(x')\} .$$

Dann bilden die Vektoren

$$\begin{gathered} \Big(1, 0, \ldots, 0, \tfrac{\partial g_1}{\partial x_1}(a'), \ldots, \tfrac{\partial g_{n-d}}{\partial x_1}(a')\Big), \\ \vdots \\ \Big(0, \ldots, 0, 1, \tfrac{\partial g_1}{\partial x_d}(a'), \ldots, \tfrac{\partial g_{n-d}}{\partial x_d}(a')\Big), \end{gathered}$$

eine Basis von $T_a M$.

Ist die Untermannigfaltigkeit M (lokal) als Nullstellengebilde von Funktionen $f_1, ..., f_{n-d}$ gegeben, so hat man folgende Darstellung von $T_a M$:

2.18 Satz. *Es sei* $U = U(a) \subset \mathbb{R}^n$ *eine offene Umgebung von* $a \in M$*, und* $f = (f_1, \dots, f_{n-d}) : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ *sei eine* C^1*-Abbildung mit*

(i) $$M \cap U \;=\; \{x \in U \,|\, f(x) = 0\} \quad ,$$

(ii) $$\operatorname{rang} Df(a) = n - d \quad .$$

Dann gilt

$$T_a M \;=\; \{v \in \mathbb{R}^n \,|\, < v, Df_i(a) >= 0 \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, n-d\} \;.$$

Beweis. Sei $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \cap U$ eine C^1-Kurve mit $\gamma(0) = a$ und $\gamma'(0) = v$. Dann gilt

$$f_i(\gamma(\tau)) \;=\; 0$$

für $i = 1, \dots, n-d$ und $-\varepsilon < \tau < \varepsilon$. Aus der Kettenregel folgt

$$0 \;=\; \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(a)\,\frac{\partial \gamma_1}{\partial \tau}(0) + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(a)\,\frac{\partial \gamma_n}{\partial \tau}(0) \;=< v, Df_i(a) >,$$

also gilt

$(*)$ $$T_a M \subset \{v \in \mathbb{R}^n \,|\, < v, Df_i(a) >= 0 \quad i = 1, \dots, n-d\} \;.$$

Aufgrund der Rangbedingung (ii) ist

$$\dim \operatorname{span}\{Df_1(a), \dots, Df_{n-d}(a)\} \;=\; n - d \;,$$

also ist

$$\dim\{v \in \mathbb{R}^n \,|\, < v, Df_i(a) > = \; 0 \quad \text{für} \;\; i = 1, \dots, n-d\} = d \;,$$

und deshalb muß in $(*)$ Gleichheit gelten. □

Den Normalenraum definieren wir als das orthogonale Komplement des Tangentialraums:

2.19 Definition. Ein Vektor $\nu \in \mathbb{R}^n$ heißt **Normalenvektor** an M im Punkt $a \in M$, wenn er auf $T_a M$ senkrecht steht, d.h., es gilt

$$< \nu, v > = \; 0 \quad \text{für alle} \;\; v \in T_a M \;.$$

Der **Normalenraum** $N_a M = (T_a M)^\perp$ an M in a besteht aus allen Normalen an M im Punkt a.

2.20 Bemerkung. Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass N_aM tatsächlich ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$ der Dimensuion $n-d$ ist. Letzteres folgt aus

$$\mathbb{R}^n = T_aM \oplus (T_aM)^\perp = T_aM \oplus N_aM$$

und der Dimensionsformel $n = \dim \mathbb{R}^n = \dim T_aM + \dim N_aM = d + \dim N_aM$.

Aus Satz 2.18 folgt sofort:

2.21 Satz. *Es sei $U = U(a) \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von $a \in M$, und $f = (f_1, \ldots, f_{n-d}) : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ sei eine C^1- Abbildung mit*

(i) $$M \cap U \;=\; \{x \in U | f(x) = 0\} \;\;,$$

(ii) $$\operatorname{rang} Df(a) \;=\; n-d \;\;.$$

Dann ist N_aM der von den Vektoren $Df_1(a), \ldots, Df_{n-d}(a)$ aufgespannte $(n-d)$-dimensionale Vektorraum,

$$N_aM \;=\; \operatorname{span}\{Df_1(a), \ldots, Df_{n-d}(a)\}$$

d.h., die Vektoren $Df_1(a), \ldots, Df_{n-d}(a)$ bilden eine Basis von N_aM.

Aus Satz 2.16 wiederum folgt die folgende Beschreibung des Normalenraums für den Fall, dass die Untermannigfaltigkeit in Parameterform gegeben ist:

2.22 Satz. *Es seien $a \in M$, $U = U(a) \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von a,und $X : T \to M \cap U$ sei eine Karte von M. Weiter sei $t_0 \in T$ mit $X(t_0) = a$. Dann gilt*

$$N_aM \;=\; \{\nu \in \mathbb{R}^n | <\nu, D_jX(t_0)>=0, \quad j = 1, \ldots, d\}$$

Im Fall einer Hyperfläche, d.h. $d = n-1$, wollen wir den eindimensionalen Normalenraum näher bestimmen:

2.23 Beispiel. (i) Sei $d = n-1$ und die Untermannigfaltigkeit M in lokaler Parameterdarstellung mittels der Karte $X : T \to M \cap U$ gegeben. Es sei $X(t_0) = a$. Sei $\nu \in \mathbb{R}^n$ mit $|\nu| = 1$. Dann sind nach Übungsaufgabe die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

(i) $<\nu, D_iX(t_0)>= 0$ für alle $i = 1, ..., n-1$, d.h. ν ist Normalenvektor an M in a

(ii) $\det(D_1X(t_0), ..., D_{n-1}X(t_0), \nu) = \max\limits_{|\tilde{\nu}|=1} |\det(D_1X(t_0), ..., D_{n-1}X(t_0), \tilde{\nu})|$

Um einen Einheitsnormalenvektor zu bestimmen, ist also die Funktion

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\; F(\nu) := \det(D_1X(t_0), ..., D_{n-1}X(t_0), \nu)$$

unter der Nebenbedingung $\nu \in S^{n-1}$, d.h.

$$g(\nu) := \sum_{i=1}^{n} \nu_i^2 - 1 = 0$$

zu maximieren bzw. minimieren. Offenbar $\nabla g(\nu) = 2\nu \neq 0$ für alle $\nu \in S^{n-1}$, womit, da F offenbar stetig differenzierbar ist, die Voraussetzungen des Satzes über die Lagrangeschen Multiplikatoren erfüllt sind. Sei also $\nu \in S^{n-1}$ Extremalwert von F innerhalb der Menge S^{n-1} (ein solcher Extremalwert existiert mit Sicherheit aus Kompaktheits- und Stetigkeitsgründen). Nach dem Satz von Lagrange existiert $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$(\star) \quad \nabla F(\nu) = \lambda g(\nu).$$

Wir bestimmen nun ∇F, indem wir F durch Entwicklung der Determinante nach der letzten Spalte neu schreiben:
Es ist

$$F(\nu) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial t_1}(t_0) & \dots & \frac{\partial X_1}{\partial t_{n-1}}(t_0) & \nu_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial X_n}{\partial t_1}(t_0) & \dots & \frac{\partial X_n}{\partial t_{n-1}}(t_0) & \nu_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \nu_i D_i$$

wobei

$$\begin{aligned} D_i = D_i(t_0) &= (-1)^{n+i} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial t_1}(t_0) & \dots & \frac{\partial X_1}{\partial t_{n-1}}(t_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \widehat{\frac{\partial X_i}{\partial t_1}}(t_0) & \dots & \widehat{\frac{\partial X_i}{\partial t_{n-1}}}(t_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial X_n}{\partial t_1}(t_0) & \dots & \frac{\partial X_n}{\partial t_{n-1}}(t_0) \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{n+i} \frac{\partial(X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_n)}{\partial(t_1, \dots, t_{n-1})}(t_0) \,. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich $\nabla F(\nu) = (D_1(t_0), ..., D_n(t_0))$ und aus $(\star)$ folgt $D_i(t_0) = 2\lambda\nu_i$, weshalb, da $|\nu| = 1$ vorausgesetzt ist,

$$\nu^{\pm} = \nu^{\pm}(a) = \pm \frac{(D_1(t_0), ..., D_n(t_0))}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} D_i^2(t_0)}}$$

für die beiden Einheitsnormalenvektoren Bestand hat.
Es sei noch angemerkt, dass man Letzteres ebenfalls unter Verwendung von $F(\nu) = \sum_{i=1}^{n} \nu_i D_i$ und der Ungleichung von Cauchy-Schwarz

$$| < v, w > | \leq |v| \, |w|, \quad v, w \in \mathbb{R}^n$$

mit Gleichheitsaussage genau dann, wenn die Vektoren kollinear sind, erhält.

(ii) Sei nun der Spezialfall $d = 2, n = 3$ betrachtet. Hier gilt die bemerkenswerte Beziehung

$$F(\nu) = \det(D_1X(t_0), D_2X(t_0), \nu) =< D_1X(t_0) \times D_2X(t_0), \nu >,$$

wobei $\times$ das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$ bezeichne, d.h. F bildet das Spatprodukt der Vektoren $D_1X(t_0), D_2X(t_0), \nu$. Die oben zitierte Ungleichung von Cauchy-Schwarz (mit Gleichheitsaussage) ergibt nun also

$$\nu^\pm = \nu^\pm(a) = \pm\frac{D_1(t_0) \times D_2(t_0)}{|D_1(t_0) \times D_2(t_0)|} = \pm\frac{\left(\frac{\partial(X_2,X_3)}{\partial(t_1,t_2)}, \frac{\partial(X_3,X_1)}{\partial(t_1,t_2)}, \frac{\partial(X_1,X_2)}{\partial(t_1,t_2)}\right)(t_0)}{|D_1(t_0) \times D_2(t_0)|}.$$

Für den Fall, dass M lokal als Graph dargestellt ist, folgt aus Korollar 2.17:

Hyperflächenfall in Graphendarstellung (Übungsaufgabe). Es sei $a \in M$, und $U = U' \times U''$ sei eine offene Zylinderumgebung von $a = (a', a_n)$, $U' = U'(a') \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $U'' = U''(a_n) \subset \mathbb{R}$, so daß

$$M \cap U \;=\; \{(x', x_n) \in U | \, x_n = g(x')\} \,.$$

Dann sind die Vektoren

$$\nu \;=\; \nu^\pm(a) \;=\; \pm\frac{(-g_{x_1}(a'), \ldots, -g_{x_{n-1}}(a'), 1)}{\sqrt{1 + \sum\limits_{i=1}^{n-1} g_{x_i}^2(a')}}$$

orthogonal zu den Tangentialvektoren

$$(1, 0, \ldots 0, g_{x_1}(a')), \quad \ldots \quad , (0, \ldots 0, 1, g_{x_{n-1}}(a')),$$

sind also die Einheitsvektoren an M im Punkt a.

2.4 Metrischer Tensor und Gramsche Determinante

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine d-dimensionale Untermannigfaltigkeit, und $(X, M \cap U)$ sei eine Karte von M, dabei ist $U = U(a) \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von $a \in M$. Weiter sei $t_0 = X^{-1}(a)$.
Der Tangentialraum

$$T_aM \;=\; \mathrm{span}\{D_1X(t_0), \ldots, D_dX(t_0)\}$$

ist als Teilraum des $\mathbb{R}^n$ in natürlicher Weise mit einem Skalarprodukt ausgestattet:

2.24 Definition. Das auf dem Tangentialraum T_aM vom Standardskalarprodukt $(\ ,\ ) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ auf dem $\mathbb{R}^n$ induzierte Skalarprodukt

$$\begin{aligned} I = I_a =&< \ , \ >_a : T_aM \times T_aM \to \mathbb{R}, \\ I(v,w) =&< v,w >_a := < v,w > \qquad \text{für} \quad v,w \in T_aM, \end{aligned}$$

heißt die **erste Fundamentalform** von M im Punkte a.

2.25 Lemma und Definition. *Bezüglich einer Karte $(X, M \cap U)$ gilt für $v = \sum_{i=1}^{d} v_i D_i X(t_0),\ w = \sum_{i=1}^{d} w_i D_i X(t_0)$*

$$\begin{aligned} < v,w >_a &= \Big\langle \sum_{i=1}^{d} v_i D_i X(t_0), \sum_{j=1}^{d} w_j D_j X(t_0) \Big\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{d} < D_i X(t_0), D_j X(t_0) > v_i w_j \\ &= \sum_{i,j=1}^{d} g_{ij}(t_0) v_i w_j, \end{aligned}$$

wobei $g_{ij}(t_0) := < D_i X(t_0), D_j X(t_0) >$ die ***Koeffizienten der ersten Fundamentalform*** *heißen.*
Die $d \times d$-Matrix

$$G \ = \ (g_{ij})_{i,j=1}^{d} \ = \ (< D_i X, D_j X >)_{i,j=1}^{d}$$

heißt **Gramsche Matrix (metrischer Tensor)** *von M bzgl. $(X, M \cap U)$ im Punkte a. Für sie gilt*

$$\begin{aligned} G \ = \ (g_{ij})_{i,j=1}^{d} &= DX^\top DX \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial X_n}{\partial t_1} \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial X_1}{\partial t_d} & \cdots & \frac{\partial X_n}{\partial t_d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial X_1}{\partial t_d} \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial X_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial X_n}{\partial t_d} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Schließlich definieren wir noch die ***Gramsche Determinante*** *g durch*

$$g := \det G.$$

2.26 Lemma (Parameterwechsel). *Seien $(X, M \cap U)$ und $(Y, M \cap V)$ zwei Karten von M mit $M \cap U \cap V \neq \emptyset$, und seien*

$$\begin{aligned} g_X &= \det\,(< D_i X, D_j X >)_{i,j=1}^{d} \ , \\ g_Y &= \det\,(< D_k Y, D_l Y >)_{k,l=1}^{d} \end{aligned}$$

die Gramschen Determinanten von M bzgl. X bzw. Y. Dann gelten für alle $s \in Y^{-1}(M \cap U \cap V)$

$$\begin{aligned} &(i) \quad G_Y(s) = (D\varphi(s))^T G_X(\varphi(s)) D\varphi(s) \\ &(ii) \quad g_Y(s) \ = \ g_X(\varphi(s)) \, (\det D\varphi(s))^2 \, , \end{aligned}$$

wobei $\varphi : Y^{-1}(M \cap U \cap V) \to X^{-1}(M \cap U \cap V)$, $\varphi := X^{-1} \circ Y$, der Parameterwechsel zwischen den beiden Karten sei.

Beweis. Aufgrund von Satz 2.13 ist der Parameterwechsel $\varphi = X^{-1} \circ Y$ differenzierbar. Nach der Kettenregel folgt durch Differentiation von $Y = X \circ (X^{-1} \circ Y) = X \circ \varphi$ für $k = 1, \dots, d$:

$$\frac{\partial Y}{\partial s_k} = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial X}{\partial t_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial s_k} \, .$$

Also gilt für $k, l = 1, ..., d$

$$< D_k Y, D_l Y > = \sum_{i,j=1}^{d} < D_i X, D_j X > \frac{\partial \varphi_i}{\partial s_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial s_l},$$

was, in Matrixschreibweise übersetzt, gerade Aussage (i) ergibt (man mache sich Dieses ggf. selber noch einmal klar). Aussage (ii) folgt nun durch Determinantenbildung in (i) unter Berücksichtigung der Multiplikativität der Letzteren und der Beziehung $\det A = \det A^T$ für jede quadratische Matrix.

□

Die folgende Formel für die Gramsche Determinante ist sehr nützlich:

2.27 Satz. *Die Gramsche Determinante von M bzgl. $(X, M \cap U)$ im Punkt a berechnet sich zu*

$$g = \sum_{i_1 < \ldots < i_d} \left(\det \frac{\partial(X_{i_1}, \dots, X_{i_d})}{\partial(t_1, \dots, t_d)} \right)^2 .$$

Beweis. Dies folgt sofort aus der Darstellung

$$\begin{aligned} g &= \det(DX^\top DX) \\ &= \det \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial X_n}{\partial t_1} \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial X_1}{\partial t_d} & \cdots & \frac{\partial X_n}{\partial t_d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial X_1}{\partial t_d} \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial X_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial X_n}{\partial t_d} \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

und der Formel von Cauchy-Binet aus der Linearen Algebra, daß

$$\begin{aligned}\det(A^\top B) &= \det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{1d} & \dots & a_{nd}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1d} \\ \vdots & \ddots & \\ b_{n1} & \dots & b_{nd}\end{pmatrix}\right) \\ &= \sum_{i_1<\ldots<i_d} \det A_{i_1\ldots i_d} \det B_{i_1\ldots i_d}\,,\end{aligned}$$

wobei $A_{i_1\ldots i_d}$ die $d\times d$-Matrix ist, die aus den $i_1,\ldots,i_d$-ten Zeilen von A besteht (für B analog), indem man dort $A := DX =: B$ wählt.

□

Wir beweisen den Satz von Cauchy-Binet an dieser Stelle:

Satz von Cauchy-Binet. Seien A, B zwei $n\times d$-Matrizen, $1 \le d \le n$. Für $k_1,\ldots,k_d \in \{1,\ldots,n\}$ sei $A_{k_1\ldots k_d}$ diejenige $d\times d$-Matrix, welche aus den Zeilen $k_1,\ldots,k_d$ von A besteht und $B_{k_1\ldots k_d}$ entsprechend. Dann gilt die **Cauchy-Binetsche Identität**

$$\det B^\top A = \sum_{k_1<\ldots<k_d} \det A_{k_1\ldots k_d} \det B_{k_1\ldots k_d}.$$

Beweis. Wir schreiben $\operatorname{sgn}(i_1,\ldots,i_d)$ für das Vorzeichen der Permutation $\begin{pmatrix} 1 & \dots & d \\ i_1 & \dots & i_d\end{pmatrix}$. Für $1 \le k_1 < \ldots < k_d \le n$ ist entsprechend $\operatorname{sgn}(\ell_1,\ldots,\ell_d)$ das Vorzeichen der Permutation $\begin{pmatrix} k_1 & \dots & k_d \\ \ell_1 & \dots & \ell_d\end{pmatrix}$. Unter Benutzung der Regeln für die Determinante berechnen wir:

$$\begin{aligned}\det A^\top B &= \det\left(\sum_{\ell=1}^n a_{\ell i} b_{\ell j}\right)_{i,j=1}^d \\ &= \sum_{i_1,\ldots,i_d=1}^d \operatorname{sgn}(i_1,\ldots,i_d)\left(\sum_{\ell=1}^n a_{\ell i_1} b_{\ell 1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sum_{\ell=1}^n a_{\ell i_d} b_{\ell d}\right) \\ &= \sum_{\ell_1,\ldots,\ell_d=1}^n \sum_{i_1,\ldots,i_d=1}^d \operatorname{sgn}(i_1,\ldots,i_d)\, a_{\ell_1 i_1}\cdot\ldots\cdot a_{\ell_d i_d} b_{\ell_1 1}\cdot\ldots\cdot b_{\ell_d d} \\ &= \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_d=1 \\ k_i<\ldots<k_d}}^n \sum_{\substack{\ell_1,\ldots,\ell_d=1 \\ \{\ell_1,\ldots,\ell_d\}=\{k_1,\ldots,k_d\}}}^n \det A_{\ell_1\ldots\ell_d} b_{\ell_1 1}\cdot\ldots\cdot b_{\ell_d d} \\ &= \sum_{k_1<\ldots<k_d} \sum_{\ell_1,\ldots,\ell_d=k_1}^{k_d} \operatorname{sgn}(\ell_1,\ldots,\ell_d) \det A_{k_1\ldots k_d} b_{\ell_1 1}\cdot\ldots\cdot b_{\ell_d d}\end{aligned}$$

$$= \sum_{k_1<\ldots<k_d} \det A_{k_1\ldots k_d} \det B_{k_1\ldots k_d}.$$

□

Bemerkung. Der Fall $d = 1$ ist die Formel für das Skalarprodukt zweier Vektoren A, B:

$$\det A^\top B = (A, B) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

Der Fall $d = n$ stellt die Formel für die Multiplikativität der Determinante dar:

$$\det A^\top B = \det A \det B.$$

Wir benötigen nur den Spezialfall $A = B$:

$$\det A^\top A = \sum_{k_1<\ldots<k_d} (\det A_{k_1\ldots k_d})^2.$$

Für $d = 2$ ist dies gerade die **Lagrange-Identität**

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} (a_i b_j - a_j b_i)^2.$$

2.28 Beispiel. (i) Im Fall einer allgemeinen Hyperfläche ($d = n - 1$) gilt

$$g = \sum_{i=1}^{n} D_i^2(t_0),$$

wobei

$$D_i = D_i(t_0) = (-1)^{n+i} \det \frac{\partial(X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_n)}{\partial(t_1, \ldots, t_{n-1})},$$

d. h. die Wurzel der Gramschen Determinante $\sqrt{g}$ ist gleich der Länge der Normalen

$$(D_1, \ldots, D_n).$$

(ii) Sei nun der Hyperflächenfall im $\mathbb{R}^3$ betrachtet ($d = 2, n = 3$). Hier gilt

$$\sqrt{g} = |D_1X(t_0) \times D_2X(t_0)|,$$

d. h. die Wurzel der Gramschen Determinante $\sqrt{g}$ ist gleich der Länge der Normalen

$$D_1X \times D_2X = \left(\frac{\partial(x_2, x_3)}{\partial(t_1, t_2)}, \frac{\partial(x_3, x_1)}{\partial(t_1, t_2)}, \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(t_1, t_2)}\right).$$

2.5 Flächeninhalt und Flächenintegrale.

Wir möchten die Definition des Flächenintegrals über eine d–dimensionale Untermannigfaltigkeit zunächst motivieren. Dazu beschränken wir uns zunächst auf den Fall $d = 2, n = 3$.

(i) Seien $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$. Dann ist $|v_1 \times v_2|$ der Flächeninhalt des von den Vektoren v_1 und v_2 aufgespannten Parallelogramms

$$P(v_1, v_2) = \{\, t_1 v_1 + t_2 v_2 \mid 0 \le t_1, t_2 \le 1 \,\} .$$

(ii) Sei $I = [t_0, t_0 + h] := \{(t^1, t^2) \mid t_0^i \le t^i \le t_0^i + h^i,\ i = 1, 2\} \subset \mathbb{R}^2,\ t_0, h \in \mathbb{R}^2$, ein zweidimensionales Intervall (Rechteck). Dann ist

$$\mathrm{Im}(I) = a + P(h^1 v_1, h^2 v_2)$$

das Bild von I unter der linearen Abbildung

$$t = \begin{pmatrix} t^1 \\ t^2 \end{pmatrix} \longmapsto t^1 v_1 + t^2 v_2,$$

dabei sind v_1, v_2 als Zeilenvektoren geschrieben und a ist das Bild von t_0.

(iii) Ist das Hyperflächenstück $M \cap U \subset \mathbb{R}^3$ parametrisiert durch $X : T \to M \cap U$, und $a = X(t_0) \in M \cap U$, so ist das Differential $DX_{t_0} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung, und das Bild von $I = [t_0, t_0 + h]$ ist gleich

$$a + P(h^1 D_1 X(t_0), h^2 D_2 X(t_0)) .$$

Für das Bild $\mathrm{Im}_X(I) = X(I)$ unter X gilt ungefähr:

$$X(I) \approx a + P(h^1 D_1 X(t_0), h^2 D_2 X(t_0)) .$$

Der Flächeninhalt berechnet sich zu

$$|D_1 X(t_0) \times D_2 X(t_0)| h^1 h^2 \ = \ \sqrt{g_X(t_0)}\, |I| .$$

Durch Partition des Gebietes T berechnet sich der anschauliche Oberflächeninhalt von $M \cap U$ approximativ zu:

$$\sum_{I_k \in \pi} |D_1 X(t_k) \times D_2 X(t_k)|\, |I_k| \ = \ \sum_{I_k \in \pi} \sqrt{g_X(t_k)} |I_k| ,$$

wobei die $t_k \in I_k$ geeignete Zwischenstellen sind. Damit ist die Definition des Flächeninhalts durch

$$\begin{aligned} A = A(X) &= A(M \cap U) \\ &= \int_T |D_1 X(t) \times D_2 X(t)| \, dt \\ &= \int_T \sqrt{g_X(t)} \, dt \end{aligned}$$

sehr plausibel.

Vorbetrachtung (allgemeiner Fall). (i) Sind $v_1, \ldots, v_d \in \mathbb{R}^n$, dann ist

$$\sqrt{g} = \sqrt{\det G} ,$$

$$G = G(v_1, \ldots, v_d) = (v_1, \ldots, v_d)^\top (v_1, \ldots, v_d)$$

das d-dimesionale Volumen bzw. der d-dimensionale Flächeninhalt des von den Vektoren $v_1, \ldots, v_d$ aufgespannten **Parallelotops (Spats)**

$$P(v_1, \ldots, v_d) = \{t_1 v_1 + \ldots + t_d v_d | \, 0 \le t_1, \ldots, t_d \le 1\} .$$

Dies sieht man folgendermaßen ein: Geometrisch anschaulich ist, daß der Flächeninhalt $A(v_1, \ldots, v_d)$ des Parallelotops $P(v_1, \ldots, v_d)$ folgende Eigenschaften besitzen sollte:

(i) $A(v_1, \ldots, \lambda v_i, \ldots, v_d) = |\lambda| A(v_1, \ldots, v_d)$
(ii) $A(v_1, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_j, \ldots, v_d) = A(v_1, \ldots, v_d)$
(iii) $A(v_1, \ldots, v_d) = 1$ für alle orthonormierten $v_1, \ldots, v_d \in \mathbb{R}^n$.

Man erinnere sich hierbei an den Spezialfall $d = n$, wo

$$A(v_1, \ldots, v_n) = |\det(v_1, \ldots, v_n)|$$

axiomatisch ähnlich festgelegt wird.

Man zeigt, daß

$$A(v_1, \ldots, v_d) := \sqrt{g} = \sqrt{\det G(v_1, \ldots, v_d)}$$

obige Eigenschaften besitzt (Existenz), und daß der Flächeninhalt durch obige Forderungen festgelegt ist (Eindeutigkeit).

(ii) Ist $M \cap U \subset \mathbb{R}^n$ parametrisiert durch $X : T \to M \cap U$, $T \subset \mathbb{R}^d$, so liegt es wie in der Vorbetrachtung im $\mathbb{R}^3$ nahe, den Flächeninhalt von X bzw. $M \cap U$ durch

$$A = A(X) = A(M \cap U) = \int_T \sqrt{g_X(t)} \, dt$$

zu definieren.

Wir definieren deshalb:

2.29 Definition. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine d-dimensionale Untermannigfaltigkeit, $(X, M \cap U)$ eine Karte und $f \in C^0(M \cap U)$. Das **Integral von f über $M \cap U$** wird definiert als

$$\int_{M\cap U} f\, dS = \int_{M\cap U} f(x)\, dS_x := \int_T f(X(t))\sqrt{g_X(t)}\, dt\,,$$

falls $\int\limits_T |f(X(t))|\sqrt{g_X(t)}\, dt < \infty$ ist. Desweiteren heißt das Integral

$$A = A(X) = A(M \cap U) = \int_{M\cap U} dS_x = \int_T \sqrt{g_X(t)}\, dt$$

Flächeninhalt von $M \cap U$,.

2.30 Bemerkung. Das Flächenintegral ist mit obiger Definition tatsächlich wohldefiniert, d.h. der Wert $\int_{M\cap U} f\, dS$ ist unabhängig von der gewählten Karte.

Beweis. Ist $(Y, M \cap V)$ eine weitere Karte mit $V = U$, so gilt nach der Parameterwechselformel für g, Lemma 2.26,

$$g_Y \;=\; g_X(\det D(X^{-1} \circ Y))^2\,,$$

daß

$$\sqrt{g_Y(s)} \;=\; \sqrt{g_X((X^{-1} \circ Y)(s))}\; \left|\det D(X^{-1} \circ Y)(s)\right|\,.$$

Aus der Transformationsformel für n-fache Integrale folgt

$$\begin{aligned}
&\int_T f(X(t))\sqrt{g_X(t)}\, dt\\
&= \int_{(X^{-1}\circ Y)(S)} f(X(t))\sqrt{g_X(t)}\, dt\\
&= \int_S f(X(X^{-1} \circ Y)(s)))\sqrt{g_X((X^{-1} \circ Y)(s))}\, |\det D(X^{-1} \circ Y)(s)|\, ds\\
&= \int_S f(Y(s))\sqrt{g_Y(s)}\, ds\,.
\end{aligned}$$

□

2.31 Beispiel. Wir betrachten die Einheitssphäre ohne "Nullmeridian" im $\mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$M = \{(\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta) \,|\, \vartheta \in (0, \pi), \varphi \in (0, 2\pi)\}.$$

Offenbar wird M von der Karte

$$X : T \to \mathbb{R}^3,\ X(\vartheta, \varphi) := (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)$$

mit $T := (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ überdeckt. Wir bestimmen die ersten partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned} D_\vartheta(\vartheta, \varphi) &= (\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, -\sin\vartheta), \\ D_\varphi(\vartheta, \varphi) &= (-\sin\vartheta\sin\varphi, \sin\vartheta\cos\varphi, 0). \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} D_\vartheta \times D_\varphi &= (\sin^2\vartheta\cos\varphi, \sin^2\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta\sin\vartheta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)) \\ &= (\sin^2\vartheta\cos\varphi, \sin^2\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta\sin\vartheta), \end{aligned}$$

womit

$$\begin{aligned} |D_\vartheta \times D_\varphi|^2 &= \sin^4\vartheta\cos^2\varphi + \sin^4\vartheta\sin^2\varphi + \cos^2\vartheta\sin^2\vartheta \\ &= \sin^4\vartheta + \cos^2\vartheta\sin^2\vartheta \\ &= \sin^2\vartheta, \end{aligned}$$

also, da $\sin\vartheta > 0$ für $\vartheta \in (0, \pi)$ gilt:

$$\sqrt{g(\vartheta, \varphi)} = |D_\vartheta \times D_\varphi| = \sin\vartheta,$$

insbesondere sieht man, dass X eine Immersion ist, d.h. die partiellen Ableitungen D_ϑ und D_φ linear unabhängig sind (Streng genommen, müsste ebenfalls gezeigt werden, dass $X : T \to M$ ein Homöomorphismus ist). Für den Flächeninhalt von M gilt also unter Verwendung des Satzes von Fubini

$$\begin{aligned} A(M) &= \int_T \sqrt{g(t)}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} [-\cos\vartheta]_0^{\pi}\, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} 2\, d\varphi = 4\pi. \end{aligned}$$

Bemerkt sei, dass bei "sinnvoller" Definition (siehe nächste Definition) des Flächenintegrals über die gesamte Einheitssphäre S^2 (welche sich nicht durch eine einzige Karte überdecken lässt), ebenfalls $A(S^2) = 4\pi$ gilt, da das Komplement

$$S^2 \setminus M = \{(\sin\vartheta, 0, \cos\vartheta) \,|\, \vartheta \in (0, \pi)\} =: \{\varphi = 0\}$$

in gewisser Weise eine "eindimensionale" Menge ist und deshalb beim zweidimensionalen Flächenintegral keinen Anteil liefert.

Wir möchten nun das Flächenintegral auf Untermannigfaltigkeiten ausdehnen, welche sich durch endlich viele Karten überdecken lassen, wobei wir uns in dieser Vorlesung auf die **kompakten** Untermannigfaltigkeiten beschränken wollen, für welche wir den Satz über die Zerlegung der Eins zur Verfügung haben, welcher zentrales Hilfsmittel der nun folgenden Definition ist.

2.32 Definition. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Untermannigfaltigkeit. Es seien eine endliche Kartenüberdeckung $(X_i, M \cap U_i)$, $i = 1, \ldots, N$, von M, d.h. mit

$$M = \bigcup_{i=1}^{N} (M \cap U_i) ,$$

und eine der Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_N\}$ untergeordnete C^∞-Partition der Eins $\{\psi_1, \ldots, \psi_N\}$, d.h., C^∞-Funtionen $\psi_1, \ldots, \psi_N$ mit

(i) $$0 \leq \psi_i(x) \leq 1 \text{ für } x \in \mathbb{R}^n \text{ und } i = 1, \ldots, N ,$$

(ii) $$\operatorname{supp} \psi_i \subset U_i \text{ für } i = 1, \ldots, N ,$$

(iii) $$\sum_{i=1}^{N} \psi_i(x) = 1 \text{ für alle } x \in M$$

zugrunde gelegt. Dann wird für eine stetige Funktion $f \in C^0(M, \mathbb{R})$ das Integral von f über M durch

$$\begin{aligned} \int_M f\, dS &= \int_M f(x)\, dS_x \\ &:= \sum_{i=1}^{N} \int_{M \cap U_i} f(x) \psi_i(x)\, dS_x \\ &:= \sum_{i=1}^{N} \int_{T_i} f(X_i(t)) \psi_i(X_i(t)) \sqrt{g_{X_i}(t)}\, dt \end{aligned}$$

erklärt.

Auch hier müssen wir uns erst davon überzeugen, dass diese Definition sinnvoll ist:

2.33 Satz. *Die obige Definition 2.32 ist sinnvoll, d.h. der Wert $\int_M f\, dS$ hängt nicht von der speziellen Wahl der Kartenüberdeckung und derjenigen der zugehörigen Partition der Eins ab.*

Beweis. Sind $(Y_j, M\cap V_j)$, $j = 1,\dots,N'$, weitere Karten mit $M = \bigcup_{j=1}^{N'}(M\cap V_j)$, und ist $\{\varphi_1,\dots,\varphi_{N'}\}$ eine der Überdeckung $\mathcal{V} = \{V_1,\dots,V_{N'}\}$ untergeordnete Partition der Eins. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N}\int_{M\cap U_i} f(x)\psi_i(x)dS_x &= \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N'}\int_{M\cap U_i\cap V_j} f(x)\psi_i(x)\varphi_j(x)dS_x\right)\\
&= \sum_{j=1}^{N'}\left(\sum_{i=1}^{N}\int_{M\cap V_j\cap U_i} f(x)\varphi_j(x)\psi_i(x)dS_x\right)\\
&= \sum_{j=1}^{N'}\int_{M\cap V_j} f(x)\varphi_j(x)dS_x
\end{aligned}$$

wie behauptet. □