Prof. Dr. A. Dall'Acqua
F. Stoffers

Sommersemester 2013
17. April 2013

Elementare Differentialgeometrie
1. Übungsblatt

Im Folgenden sei stets $n \in \mathbb{N}$. Die **orthogonale Gruppe** $O(n)$ ist definiert durch
$O(n) := \{A \in GL(n) |\ A^{-1} = A^T\}$, wobei $GL(n)$ die Menge der invertierbaren $(n \times n)-$Matrizen ist.

Ein **Großkreis** der Sphäre $\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | |x| = 1\}$ ist ein auf $\mathbb{S}^n$ liegender Kreis, dessen Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt der Sphäre, dem Ursprung, übereinstimmt.

1. Aufgabe
Man betrachte für Parameter $a \geq b > 0$ die parametrisierte Ellipse $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ c(t) := (a \sin t, b \cos t)^T$ für $t \in [0, 2\pi]$. Man bestimme deren Bogenlänge und finde eine Umparametrisierung $\varphi : [0, L(c)] \to [0, 2\pi]$, derart dass $c \circ \varphi$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

Hinweis: Die obige Umparametrisierung ist "so explizit wie möglich" anzugeben. Blicke in Bücher sind angeraten.

2. Aufgabe $*$ (4+4+8=16 Punkte)

(a) Seien $a < b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte reguläre Kurve. Man zeige, dass $L(c) \geq |c(b) - c(a)|$ gilt, d.h. die gerade Verbindungsstrecke der Punkte $c(a)$ und $c(b)$ ist immer kürzeste Verbindungskurve dieser Punkte.

(b) Sei I ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre parametrisierte Kurve und $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine **Bewegung**, d.h. es existieren $A \in O(n)$ und $b \in \mathbb{R}^n$ mit $F(x) = Ax + b$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Man zeige, dass dann

$$L(c) = L(F \circ c)$$

gilt.

(c) Sei $c : [a, b] \to \mathbb{S}^n$ eine parametrisierte reguläre Kurve. $\tilde{c}$ sei eine reguläre Parametrisierung "des" kürzeren Teils des Großkreises (im Fall $c(a) = -c(b)$ ist dieser nicht eindeutig) durch $c(a)$ und $c(b)$. Man zeige, dass $L(c) \geq L(\tilde{c})$ gilt.

(*Hinweis: Man betrachte die auf* $[a, b]$ *definierte Funktion* $\phi(t) := \arccos(< c(a), c(t) >) \in [0, \pi]$, *zerlege für* $t \in [a, b]$ *mit* $c(t) \notin \{\pm c(a)\}$ *den Vektor* $c(t)$ *in einen zu* $c(a)$ *parallelen und einen zu* $c(a)$ *orthogonalen Anteil durch*

$$c(t) =< c(t), c(a) > c(a)\ + < c(t), Y(t) > Y(t)$$

mit $|Y(t)| \equiv 1$ *und* $Y(t) \perp c(a)$ *und zeige dann* $|\dot{c}(t)|^2 \geq |\phi'(t)|^2$. *Schließlich bedenke man* $\phi(b) = L(\tilde{c})$.)

3. Aufgabe

Man betrachte die Abbildung $G : \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1)^T\} \to \mathbb{R}^2$,

$$G \begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{p^1}{1-p^3} \\ \frac{p^2}{1-p^3} \end{pmatrix}.$$

Man zeige, dass G bijektiv ist und berechne $F = G^{-1}$. Desweiteren zeige man, dass F konform ist, d.h.

$$\left|\frac{\partial F}{\partial u^1}\right| = \left|\frac{\partial F}{\partial u^2}\right|, \qquad \langle \frac{\partial F}{\partial u^1}, \frac{\partial F}{\partial u^2} \rangle = 0.$$

Unter der Annahme, dass die $\mathbb{S}^2$ ein geeignetes Modell für unsere Erde ist, berechne man die kürzeste Verbindung $c(\,.\,)$ von Frankfurt ($50°06'N$ $8°40'O$) nach Los Angeles ($34°03'N$ $118°14'W$). Man fertige mit maple o.ä. ein Bild von $c(\,.\,)$ und von $G \circ c(\,.\,)$ an.

4. Aufgabe

Sei I ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre parametrisierte Kurve mit konstanter Krümmung $\kappa_0 \in \mathbb{R}$. Man zeige, dass $c(I)$ Teilmenge einer Geraden (im Fall $\kappa_0 = 0$) bzw. eines Kreises (im Fall $\kappa_0 \neq 0$) ist.

Ihre Lösungen der mit einem Stern versehenen Aufgabe(n) geben Sie bitte am Donnerstag, den 25.04.2013 in der Übung ab.

Bitte bereiten Sie die übrigen Aufgaben als Präsenzaufgaben für die Übung am Donnerstag, den 25.04.2013 vor.