Prof. Dr. A. Dall'Acqua
F. Stoffers

Sommersemester 2013
26. Juni 2013

Elementare Differentialgeometrie
10. Übungsblatt

1. Aufgabe
Betrachtet sei die Sattelfläche S, parametrisiert durch die Abbildung

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ F(x,y) := (x, y, x^2 - y^2)^t,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\ .$$

Man bestimme für alle $p \in S$

(a) die erste Fundamentalform I_p der Sattelfläche,

(b) die Tangentialebene T_pS,

(c) die Weingartenabbildung $W_p : T_pS \to T_pS$.

Eine Fläche S heißt **Regelfläche**, wenn sie eine universelle Parametrisierung der Form

$$f(u,v) = c(u) + vX(u),\ (u,v) \in I \times J$$

zulässt, wobei I, J offene Intervalle in $\mathbb{R}$, $c = c(u) : I \to \mathbb{R}^3$ eine glatte Kurve und $X = X(u) : I \to \mathbb{R}^3$ eine glatte Kurve mit $|X(u)| = 1$ für alle $u \in I$ sind.

2. Aufgabe $*$ (2+6+3+4=15 Punkte)

(a) Man gebe Bedingungen an, unter denen eine Regelfläche S regulär ist.

(b) Es sei S eine reguläre Regelfläche mit $\dot{X}(u) \neq 0$ für alle $u \in I$ und zugehöriger Parametrisierung

$$f(u,v) = c(u) + vX(u),\ (u,v) \in I \times \mathbb{R}\ .$$

Man zeige, dass eine Parametrisierung der Fläche

$$\tilde{f}(t,s) = \tilde{c}(t) + s\tilde{X}(t),\ (t,s) \in \tilde{I} \times \mathbb{R}$$

existiert mit

(i) $|\tilde{X}(t)| = |\dot{\tilde{X}}(t)| = 1$ für alle $t \in \tilde{I}$,

(ii) $< \dot{\tilde{c}}(t), \dot{\tilde{X}}(t) >= 0$ für alle $t \in \tilde{I}$.

(c) Man zeige, dass folgende reguläre Flächen Regelflächen sind:

(i) Der Zylinder $\{(r\cos(\alpha), r\sin(\alpha), h) \in \mathbb{R}^3 : \alpha \in [0, 2\pi], h \in \mathbb{R}\}$ mit $r > 0$,

(ii) Das hyperbolische Paraboloid $\{(x,y,z)^t \in \mathbb{R}^3 :\ z = xy\}$.

Hinweis zu (b): Man suche zunächst eine in der Fläche S verlaufende Kurve $\hat{c}$ mit

$$< \dot{\hat{c}}(u), \dot{X}(u) >= 0$$

für alle $u \in I$.

Hinweis zu (c)(ii): Finden Sie eine Familie von Geraden, die in der Fläche verlaufen, und überlegen Sie sich, wieviele Freiheitsgrade diese hat.

3. Aufgabe
Betrachtet sei die Sphäre $\mathbb{S}^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 :\ |x| = 1\}$. Zeigen Sie, dass für alle $p \in \mathbb{S}^2$

$$T_p\mathbb{S}^2 = \mathrm{Span}\{p\}^\perp$$

gilt.

4. Aufgabe
Es sei S das Möbiusband von Serie 9, Aufgabe 3 mit der dort angegebenen universellen Parametrisierung F. Man zeige, dass S nicht orientierbar ist, d.h. es gibt kein glattes Einheitsnormalenfeld $N : S \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$.

Hinweis: Man nehme an, S wäre orientierbar, und bestimme dann die möglichen Lösungen für N längs der Kurve $c : \mathbb{R} \to S$ mit $c(t) := F(t, 0)$.

Ihre Lösungen der mit einem Stern versehenen Aufgabe geben Sie bitte am Donnerstag, den 04.07.2013 in der Übung ab.

Bitte bereiten Sie die übrigen Aufgaben als Präsenzaufgaben für die Übung am Montag, den 01.07.2013 vor.