Prof. Dr. A. Dall'Acqua
F. Stoffers

Sommersemester 2013
22. Mai 2013

Elementare Differentialgeometrie
5. Übungsblatt

1. Aufgabe
Sei $c: I \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre parametrisierte Kurve. Nehmen Sie an, dass $\kappa(t) = C_1 > 0$ und $\tau(t) = C_2 \in \mathbb{R}$ für alle $t \in I$ gilt. Zeigen Sie, dass c ein Teil einer Schraubenlinie ist.

Hinweis: Benutzen Sie einen Satz der Vorlesung.

2. Aufgabe $*$ (5+5+5=15 Punkte)
Sei $c: I \to \mathbb{R}^3$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Raumkurve mit $\kappa \neq 0$. Sei $t_0 \in I$ gegeben. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Krümmung von c in t_0 ist gleich der Krümmung in t_0 der ebenen Kurve, die man durch Projektion von $c(\,.\,) - c(t_0)$ auf die Schmiegeebene von c in $c(t_0)$ erhält.

(b) Es existiert eine eindeutig bestimmte Schraubenlinie $b: I \to \mathbb{R}^3$ derart, dass beide Kurven in t_0 dasselbe begleitende 3-Bein sowie diesselbe Krümmung und Torsion besitzen.

(c) Sei $\{v(t_0), n(t_0), b(t_0)\}$ das begleitende 3-Bein von c in t_0. Finden Sie die Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und ε so, dass nahe t_0 gilt:

$$\begin{aligned} c(t) &= c(t_0) + \alpha v(t_0)(t-t_0) + \beta n(t_0)(t-t_0)^2 \\ &\quad + \gamma v(t_0)(t-t_0)^3 + \delta n(t_0)(t-t_0)^3 + \varepsilon b(t_0)(t-t_0)^3 + O((t-t_0)^4)\,. \end{aligned}$$

3. Aufgabe
Sei $c: I \to \mathbb{R}^3$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Raumkurve. Nehmen Sie an, dass $\kappa(t) \neq 0$, $\tau(t) \neq 0$ und $\dot{\kappa}(t) \neq 0$ für alle $t \in I$.

Zeigen Sie, dass

$$R(t)^2 + \dot{R}(t)^2 T(t)^2 = \text{konst.}$$

eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass $c(I)$ auf einer Sphäre liegt. Dabei ist $R(t) = \frac{1}{\kappa(t)}$, $T(t) = \frac{1}{\tau(t)}$.

Hinweis: Bestimmen Sie die Koeffizienten der Darstellung $c(t) = \alpha + \beta(t)v(t) + \gamma(t)n(t) + \delta(t)b(t)$.

Ihre Lösungen der mit einem Stern versehenen Aufgabe geben Sie bitte am Mittwoch, den 29.05.2013 in der Vorlesung ab.

Bitte bereiten Sie die übrigen Aufgaben als Präsenzaufgaben für die Übung am Donnerstag, den 06.06.2013 vor.