Prof. Dr. A. Dall'Acqua
F. Stoffers

Sommersemester 2013
05. Juni 2013

Elementare Differentialgeometrie
7. Übungsblatt

1. Aufgabe [etwas schwieriger]
Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Raumkurve. Nehmen Sie an, dass $\kappa(t) \neq 0$ und $\tau(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Die Kurve c heißt eine **Bertrandsche Kurve**, wenn es eine Kurve $\hat{c} : I \to \mathbb{R}^3$ gibt mit $\hat{c} \neq c$, so dass die Geraden durch die jeweiligen Kurvenpunkte von c und $\hat{c}$ in Richtung der jeweiligen Hauptnormalen für alle $t \in I$ gleich sind. In diesem Fall heißt $\hat{c}$ konjugierte Bertrandsche Kurve zu c, und man kann schreiben

$$\hat{c}(t) = c(t) + r(t)n(t) \text{ für alle } t \in I.$$

(a) Sei c eine Bertrandsche Kurve mit Konjugierter $\hat{c}(t) = c(t) + r(t)n(t)$ mit einer Funktion $r(t)$. Beweisen Sie, dass r konstant ist.

(b) Sei angenommen, dass $A\kappa(t) + B\tau(t) = 1$ für alle $t \in I$ und für $A, B \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass c eine konjugierte Bertrandsche Kurve besitzt.
Hinweis. Betrachten Sie $\hat{c} = c + An$.

(c) Zeigen Sie: Falls c eine konjugierte Bertrandsche Kurve besitzt, dann gilt $A\kappa(t) + B\tau(t) = 1$ für alle $t \in I$ mit geeigneten $A, B \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(d) Zeigen Sie, dass c unendlich viele konjugierte Bertrandsche Kurven besitzt, falls c mehr als eine konjugierte Bertrandsche Kurve besitzt. Welche Raumkurven besitzen unendlich viele konjugierte Bertrandsche Kurven?

2. Aufgabe
Es seien I ein Intervall in $\mathbb{R}$, $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve und $\hat{c} : I \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre parametrisierte Kurve. Für beide Kurven sei angenommen, dass Krümmung und Torsion nicht verschwinden, d.h. $k, \hat{k} \neq 0$ und $\tau, \hat{\tau} \neq 0$ für alle $t \in I$. Außerdem mögen die Geraden durch die jeweiligen Kurvenpunkte von c und $\hat{c}$ in Richtung der jeweiligen Binormalen für alle $t \in I$ übereinstimmen. Man zeige, dass dann $c(t) = \hat{c}(t)$ für alle gilt.

3. Aufgabe $*$ (4+4+4+4=16 Punkte)
Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Raumkurve. Es sei angenommen, dass $|c(t)| = 1$ für alle $t \in I$, d.h. das Bild von c in der Einheitssphäre $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ liegt. Sei $\kappa > 0$ die Krümmung von c, τ die Torsion von c und $J := det(c, \dot{c}, \ddot{c})$. Zeigen Sie, dass

(a) $\ddot{c} = -c + Jc \times \dot{c}$;

(b) $\kappa = \sqrt{1 + J^2}$ und $\tau = \dot{J}(1 + J^2)^{-1}$.

Beweisen Sie weiter die folgenden Aussagen:

(c) $J \equiv 0$ ist eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass c ein Großkreis ist.

(d) $J \equiv$ konst. $\neq 0$ ist eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass c ein Kleinkreis ist. Dabei ist ein Kleinkreis die Schnittmenge der Einheitssphäre mit einer Ebene, die den Ursprung nicht enthält.

Hinweis zu (a): Man bedenke die Identität $\det(x, y, z) = < x \times y, z >$ für $x, y, z \in \mathbb{R}^3$.
Hinweis zu (c),(d): Man benutze den Hauptsatz der Raumkurventheorie.

4. Aufgabe
Sei $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eine als lediglich stetig vorausgesetzte periodische lokal injektive parametrisierte Raumkurve mit minimaler Periode $L > 0$. Für $e \in \mathbb{S}^2$ sei $\mu(c, e)$ wie in Definition 3.18 definiert, d.h.

$$\mu(c, e) := \sharp\{\text{lokale Maxima in } [0, L) \text{ der Funktion } \mathbb{R} \ni t \mapsto < e, c(t) > \in \mathbb{R}\}\,.$$

Zeigen Sie, dass $\mu(c, e) = \mu(c, -e)$.

Ihre Lösungen der mit einem Stern versehenen Aufgabe geben Sie bitte am Mittwoch, den 12.06.2013 in der Übung ab.

Bitte bereiten Sie die übrigen Aufgaben als Präsenzaufgaben für die Übung am Mittwoch, den 12.06.2013 vor.