Prof. Dr. A. Dall'Acqua
F. Stoffers

Sommersemester 2013
12. Juni 2013

Elementare Differentialgeometrie
8. Übungsblatt

1. Aufgabe
Sei $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre einfach geschlossene Kurve mit minimaler Periode $L = 4$. Wir nehmen weiter an, dass $c|_{[-1,3]} : [-1,3] \to \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ mit

$$\begin{aligned} \forall x \in [-1,1] : \quad & c(x) = (x, u(x), 0)^t, \\ \forall x \in [1,3] : \quad & c(x) = (2-x, -u(2-x), 0)^t \end{aligned}$$

vorliegt. Dabei sei $u : [-1,1] \to \mathbb{R}$ so, dass $u > 0$ in $(-1,1)$ und $u(-1) = u(1) = 0$. Weiterhin sei angenommen, dass die Grenzwerte

$$\begin{aligned} \lim_{x \nearrow 1} \frac{u(x)}{\sqrt{1-x^2}} &= s_1 \neq 0, \\ \lim_{x \searrow -1} \frac{u(x)}{\sqrt{1-x^2}} &= s_{-1} \neq 0 \end{aligned}$$

existieren. Man zeige, dass c ambient isotop zu $\mathbb{S}^1 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ ist.

2. Aufgabe $*$ (8+6=14 Punkte)
Sei C die Kreislinie in der Ebene $\{0\} \times \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ mit Mittelpunkt $(0, a, 0)^t$, $a > 1$, und Radius $r = 1$. Sei M die Menge der Punkte, die man aus C durch Rotation bezüglich der Achse $(0,0,1)^t$ erhält.
Zeigen Sie:

(a) $M = \{(x,y,z)^t \in \mathbb{R}^3 : \; z^2 + (\sqrt{x^2+y^2} - a)^2 = 1\}$;

(b) M ist eine reguläre Fläche.

Hinweis zu (b): Man kann Aufgabe 3 benutzen.

3. Aufgabe
Sei S eine Teilmenge des $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass folgende Definitionen äquivalent sind:

(a) S ist eine reguläre Fläche, d.h. zu jedem Punkt $p_0 \in S$ existiert eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^3$ von p_0, eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ und eine glatte Abbildung $F : U \to \mathbb{R}^3$, derart dass gilt
   (i) $F(U) = S \cap V$ und $F : U \to S \cap V$ ist ein Homöomorphismus,
   (ii) $\forall u \in U : \operatorname{Rg} DF(u) = 2$.

(b) S lässt sich lokal als Graph darstellen, d.h. für alle $p_0 \in S$ existiert eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^3$ von p_0, eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^2$, eine Indexpermutation j_1, j_2, j_3 sowie eine glatte Funktion $f : U \to \mathbb{R}$, derart dass gilt:

$$S \cap V = \left\{ (p^1, p^2, p^3)^t \in V : (p^{j_1}, p^{j_2}) \in U, \; p^{j_3} = f(p^{j_1}, p^{j_2}) \right\} .$$

(c) S lässt sich lokal als Nullstellengebilde darstellen, d.h. für alle $p_0 \in S$ existiert eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^3$ von p_0 und eine glatte Funktion $h : V \to \mathbb{R}$, derart dass gilt:
   (i) $S \cap V = \{p \in V : h(p) = 0\}$,
   (ii) $\forall p \in S \cap V : \operatorname{grad} h(p) \neq 0$.

Hinweis: Man denke an die Sätze über implizite Funktionen bzw. über die lokale Inverse.

4. Aufgabe

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xyz^2$.

(a) Für welche Werte von $C \in \mathbb{R}$ ist $\Gamma_C := \{(x,y,z)^t \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = C\}$ eine reguläre Fläche?

(b) Finden Sie lokale Parametrisierungen für Γ_1, d.h. für Γ_C mit $C = 1$.

Ihre Lösungen der mit einem Stern versehenen Aufgabe geben Sie bitte am Donnerstag, den 20.06.2013 in der Übung ab.

Bitte bereiten Sie die übrigen Aufgaben als Präsenzaufgaben für die Übung am Donnerstag, den 20.06.2013 vor.