ulm university universität uulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Prof. Dr. Friedmar Schulz
friedmar.schulz@uni-ulm.de

Frédéric Stoffers
frederic.stoffers@uni-ulm.de

Elemente der Funktionalanalysis – Übungsblatt 1
Abgabe: bis Freitag, 24.04.2015 vor der Übung

1. Es sei $M := \{(x_1, x_2, \ldots) | x_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}\}$ die Menge der reellen Folgen. Man zeige, dass durch

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}, \quad x, y \in M,$$

(M, d) ein metrischer Raum wird. [6]

2. Es seien $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $a, b \in \mathbb{R}^+$. Beweisen Sie:

   (a) $a \cdot b \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$. (Hinweis: Man kann die Konvexität der Exponentialfunktion verwenden.) [4]

   (b) für alle $\varepsilon > 0$ gilt [2]

$$a \cdot b \leq \frac{\varepsilon^p}{p} a^p + \frac{1}{\varepsilon^q \cdot q} b^q.$$

3. Beweisen Sie (z.B. mit Hilfe von Aufg. 2) die Hölder-Ungleichung: Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sind $f \in L^p(X), g \in L^q(X)$, so gilt $fg \in L^1(X)$ und es besteht die Ungleichung

$$\int_X |f(x)g(x)|\, dx \leq ||f||_p \, ||g||_q.$$

[6]

Hinweis: Es wird die Konvention $\frac{1}{\infty} := 0$ verwendet. Verwenden Sie eine Fallunterscheidung, je nachdem ob $\{p, q\} \cap \{\infty\} = \emptyset$ oder nicht vorliegt.

4. Beweisen Sie die die Minkowski–Ungleichung: Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $p \in [1, \infty]$. Dann gilt: Sind $f, g \in L^p(X)$, so gilt $f + g \in L^p(X)$ und es besteht die Dreiecksungleichung

$$||f + g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p.$$

[6]

Hinweis: Es lässt sich im Fall $p < \infty$ die Ungleichung $|A + B|^p \leq |A||A + B|^{p-1} + |B||A + B|^{p-1}$ und Aufg. 3 verwenden.

Zusatz (keine Abgabe): Man überlege sich, was die Aussagen in Aufg. 3 und 4 in dem Falle bedeuten, dass der Maßraum von der Form $(\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}), \mu)$ bzw. $(\{1, ..., n\}, \mathfrak{P}(\{1, ..., n\}), \mu)$ ist, wobei mit μ das Zählmaß bezeichnet sei.