Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Prof. Dr. Friedmar Schulz
friedmar.schulz@uni-ulm.de

Frédéric Stoffers
frederic.stoffers@uni-ulm.de

Elemente der Funktionalanalysis – Übungsblatt 3

Abgabe: bis Freitag, 22.05.2015 vor der Übung

1. (Inklusionsrelationen der l^p- bzw. L^p-Räume untereinander). Beweisen Sie:

   (a) Für $1 \leq p \leq q < \infty$ gilt die Inklusion $l^p \subset l^q$, genauer gilt [3]

   $$||x||_q \leq ||x||_p \ \forall x \in l^p.$$

   Hinweis: Beweisen Sie die Ungleichung zunächst für den Spezialfall $||x||_p = 1$.

   (b) i. Man beweise die verallgemeinerte Hölder-Ungleichung: Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $1 \leq p, q < \infty$. Setze $\frac{1}{r} := \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Seien weiterhin $f \in L^p(X)$ und $g \in L^q(X)$. Dann gilt [3]

   $$\Big(\int_X |f(x)g(x)|^r \, d\mu \Big)^{\frac{1}{r}} \leq ||f||_p ||g||_q.$$

   ii. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und $1 \leq p \leq q < \infty$. Dann gilt $L^q(X) \subset L^p(X)$, genauer gilt [2]

   $$\frac{||f||_p}{\mu(X)^{\frac{1}{p}}} \leq \frac{||f||_q}{\mu(X)^{\frac{1}{q}}}.$$

   iii. Beweisen Sie anhand eines möglichst einfachen Beispiels, dass im Falle eines unendlichen Maßraums für $1 \leq p < q < \infty$ weder $L^p(X) \subset L^q(X)$ noch $L^q(X) \subset L^p(X)$ zu gelten braucht. [3]

2. Sei $w \in C([0,1], \mathbb{R})$ und betrachte auf $C([0,1], \mathbb{C}) \times C([0,1], \mathbb{C})$ die Abbildung

   $$\langle x, y \rangle_w := \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}w(t) \, dt.$$

   (a) Geben Sie notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, dass $\langle .,. \rangle_w$ ein Skalarprodukt ist. [2]

   (b) Nehmen Sie an, dass w die in (a) gegebenen Bedingungen erfüllt. Unter welchen zusätzlichen Bedingungen ist die von $\langle .,. \rangle_w$ abgeleitete Norm äquivalent zur vom üblichen Skalarprodukt $\langle x, y \rangle := \int_0^1 x(t)\overline{y(t)} \, dt$ abgeleiteten Norm? [2]

3. Beweisen Sie (ausführlich) die Eindeutigkeit (bis auf isometrische Isomorphie) der Vervollständigung eines normierten Raumes $(X, ||.||)$, d.h. Satz 1.3.2 der Vorlesung. [4]

4. Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte offene Menge und $1 \leq p < \infty$. Beweisen Sie, dass $C^0(\overline{G})$ dicht (bzgl. der L^p-Norm) in $L^p(G)$ liegt. [5]

   Hinweis: Man kann z.B. den Satz von Lusin (Satz 2.5.10 im Skript "Maß und Integral", Friedmar Schulz) verwenden.