ulm university universität ulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Prof. Dr. Friedmar Schulz
friedmar.schulz@uni-ulm.de

Frédéric Stoffers
frederic.stoffers@uni-ulm.de

Elemente der Funktionalanalysis – Übungsblatt 7
Abgabe: bis Freitag, 17.07.2015 vor der Übung

Sei X ein normierter Raum über dem Körper $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $X' := L(X, \mathbb{K})$ die Menge der stetigen linearen Funktionale auf X. Wir sagen, eine Folge $(x_n) \subset X$ *konvergiert schwach* gegen $x \in X$ (in Zeichen $x_n \rightharpoonup x$), falls für alle $x' \in X'$

$$x'(x_n) \to x'(x) \quad (n \to \infty)$$

gilt.
Eine Teilmenge A von X heißt *schwach abgeschlossen*, wenn gilt: Für alle Folgen $(x_n) \subset A$ und $x \in X$ mit $x_n \rightharpoonup x$ folgt $x \in A$.

1. Sie dürfen davon ausgehen, dass der Satz von Hahn-Banach, insbesondere die Aussagen von Serie 6, Aufg. 4, auch in allgemeinen normierten Räumen gelten. Beweisen Sie:

   (a) Man beweise, dass der schwache Limes in allgemeinen normierten Räumen eindeutig bestimmt ist. [1]

   (b) Sei U ein Unterraum eines normierten Raumes X, $(x_n) \subset U$ eine Folge in U und $x \in U$. Beweisen Sie: [2]
   $$\big(x_n \rightharpoonup x \text{ in } U\big) \Leftrightarrow \big(x_n \rightharpoonup x \text{ in } X\big).$$

   (c) Eine schwach abgeschlossene Teilmenge eines normierten Raumes ist (norm-)abgeschlossen. [1]

   (d) Es sei K eine (norm-)abgeschlossene konvexe Teilmenge eines normierten Raumes X. Dann ist K schwach abgeschlossen. [2]

   (e) Man zeige anhand eines Beispiels (z.b. in l_2), dass Aussage (d) ohne die Konvexitätsvoraussetzung falsch wird. [2]

2. Seien H_1, H_2 zwei Hilberräume und $T : H_1 \to H_2$ ein linearer Operator. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen: [4]

   (a) T ist stetig.

   (b) T ist *schwach stetig*, d.h., ist $x_n \rightharpoonup x$ in H_1, so folgt $T(x_n) \rightharpoonup T(x)$ in H_2.

   Bemerkung: Die Aussage gilt auch für lineare Abbildungen zwischen allgemeinen normierten Räumen.

3. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise orthogonaler Elemente eines Hilbert–Raumes H, so dass $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ schwach konvergiert (d.h., die Folge der Partialsummen ist schwach konvergent). Man beweise, dass $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (in der Norm) konvergiert. [4]

4. Seien H ein separabler ∞–dimensionaler Hilbert–Raum und $T : H \to H$ ein beschränkter linearer Operator, dessen Matrixdarstellung $A = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ die Bedingung

$$a_{ij} = 0 \text{ für } |i - j| > 1$$

erfüllt.

   (a) Man zeige: $\lim_{i,j \to \infty} a_{ij} = 0 \Leftrightarrow T$ ist kompakt. [5]

   Hinweis: Die Sätze 4.2.10 und 4.4.3 der Vorlesung könnten in der Beweisfühtung von Nutzen sein.

   (b) Man gebe einen kompakten linearen Operator an, dessen Hilbert–Schmidtsche Norm nicht endlich ist. [2]

5. Es seien H_1, H_2, H_3, H_4 Hilbert–Räume und $A \in L(H_1, H_2), T \in L(H_2, H_3), B \in L(H_3, H_4)$, wobei zusätzlich $N(T) < \infty$ gelte. Beweisen Sie, dass dann $BTA : H_1 \to H_4$ endliche Hilbert–Schmidtsche Norm besitzt und

$$N(BTA) \leq ||B||\, N(T)\, ||A||$$

gilt. [4]