Universität Ulm

Abgabe:
22.01.14, 16:00 Uhr
im H3

Prof. Dr. F. Schulz
F. Stoffers
Wintersemester 13/14

40 Punkte

Übungen zur Maßtheorie

Serie 6

Die folgenden Aufgaben beziehen sich sämtlich auf Kapitel 3 der Vorlesung.

1. (a) Man folgere den Satz von B. Levi aus dem Lemma von Fatou. [5]

(b) Man zeige an einem Beispiel, dass der Satz von Levi für fallende Folgen messbarer, nicht-negativer Funktionen im Allgemeinen nicht gilt. [5]

2. Seien $A_1, \ldots, A_N$ messbare Teilmengen von $[0,1]$ derart, dass jedes $x \in [0,1]$ in mindestens k dieser Mengen enthalten ist ($k \in \{1, \ldots, N\}$).
Man zeige: Es gibt ein $l \in \{1, \ldots, N\}$ mit $\lambda(A_l) \geq \frac{k}{N}$. [8]

3. (a) Man beweise eine Verallgemeinerung des Satzes von der majorisierten Konvergenz, Satz 3.3.6:
Sei $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge integrierbarer Funktionen über einer messbaren Menge D, die f.ü. gegen eine integrierbare Funktion g konvergiert. Weiterhin sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen auf D mit $|f_k| \leq g_k$ f.ü., die f.ü. gegen eine Funktion f konvergiert. Gilt $\lim\limits_{k\to\infty} \int_D g_k\, dx = \int_D g\, dx$, so ist f integrierbar und

$$\lim_{k\to\infty} \int_D f_k\, dx = \int_D f\, dx \ .$$

[6]

Hinweis: Man schaue sich den Beweis von Satz 3.3.6 an.

(b) Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen auf D mit $f_k \to f$ f.ü., wobei f eine integrierbare Funktion über D ist. Man beweise die Äquivalenz der folgenden Aussagen

(i) $\displaystyle\int_D |f - f_k|\, dx \to 0 \qquad (k \to \infty)$,

(ii) $\displaystyle\int_D |f_k|\, dx \to \int_D |f|\, dx \qquad (k \to \infty)$.

[6]

Hinweis zu "$(ii) \Rightarrow (i)$": Es lässt sich Teil (a) verwenden.

-Bitte wenden-

4. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine messbare Menge, $I = [0,1]$ und die Funktion $f : A \times I \to \mathbb{R}$ habe die folgenden Eigenschaften:

1. Für jedes $t \in I$ sei die Funktion $x \mapsto f(x,t)$ integrierbar über A.
2. Für fast alle $x \in A$ sei die Funktion $t \mapsto f(x,t)$ differenzierbar in I.
3. Es gibt eine integrierbare Majorante $g : A \to [0, +\infty]$ der Ableitung $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)$, d.h., für alle $t \in I$ und fast alle $x \in A$ gilt
$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \right| \;\leq\; g(t)\ .$$

Man zeige: Dann ist die Funktion $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ für jedes $t \in I$ integrierbar über A, die durch
$$F(t) \;:=\; \int_A f(x,t)\,dx$$
definierte Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ ist in I differenzierbar und hat die Ableitung
$$F'(t) \;=\; \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx\ .$$

[10]

Hinweis: Man versuche den Lebesgueschen Konvergenzsatz anzuwenden.