Universität Ulm

Abgabe:
08.01.14, 16:00 Uhr
im H3

Prof. Dr. F. Schulz
F. Stoffers
Wintersemester 13/14

37 Punkte

Übungen zur Maßtheorie

Weihnachtsserie

1. (a) Sei X eine nicht leere Menge, $C \subset X$ und $\mathcal{A}$ eine σ–Algebra auf X. Wir definieren $\mathcal{A}_C := \{A \cap C | A \in \mathcal{A}\}$. Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{A}_C$ ist eine σ–Algebra. [3]

(b) Falls $C \in A$ gilt, so ist $\mathcal{A}_C = \{A \in \mathcal{A} | A \subset C\}$. [2]

(b) Sei X eine überabzählbare Menge, $\mathcal{S}$ die Familie der höchstens abzählbaren Teilmengen von X. Mit

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{A}\ \sigma\text{–Algebra} \\ \mathcal{A} \supset \mathcal{S}}} \mathcal{A}$$

sei die von $\mathcal{S}$ erzeugte σ–Algebra bezeichnet. Beweisen Sie, dass

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \{A \subset X | A \text{ höchstens abzählbar oder } \mathcal{C}A \text{ höchstens abzählbar}\}$$

gilt. [5]

2. Sei X eine nicht leere Menge. Untersuchen Sie, ob es sich bei den folgenden Mengenfunktionen $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ um Maße handelt:

(a)

$$\mu^*(A) := \begin{cases} card(A) & \text{falls } A \text{ endlich} \\ \infty & \text{sonst ,} \end{cases}$$

wobei $card(A)$ die Anzahl der in A liegenden Elemente bezeichnet. [3]

(b) Für $x_0 \in X$ sei

$$\mu^*(A) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x_0 \in A \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

[3]

(c) Für $X := \mathbb{R}^n$ sei

$$\mu^*(A) := \sup\{|x - y| \mid x, y \in A\} .$$

[3]

3. (a) Man gebe ein (möglichst einfaches) Beispiel einer messbaren Funktion, deren Menge der Unstetigkeitspunkte positives Maß besitzt. [5]

(b) Man beweise: Jede monoton wachsende (bzw. fallende) Funktion $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ ist messbar. [3]

–Bitte wenden–

4. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[-n,n]}$. Man untersuche diese Funktionenfolge auf folgende Konvergenzarten:

(a) Punktweise Konvergenz, [3]

(b) Konvergenz dem Maße nach, [3]

(c) Konvergenz im $p-$ten Mittel für $p \in [1, \infty]$. Dabei ist das $p-$te Mittel von f definiert als

$$\left(\int |f|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \; p \in [1, \infty)$$

bzw.

$$\inf\{c > 0 \mid |f| \leq c \text{ f.ü.}\}, \; p = \infty \; .$$

[4]