Musterlösung Serie 8

1. Aufgabe

\[ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x^2 - 4x + 16 \]

\[ = 2 \left[ \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{7}{4} \right] \]

Dieser Darstellung entnimmt man, dass \( f \) auf \( D_1 = (-\infty, 1] \) streng monoton fallend und auf \( D_2 = [1, \infty) \) streng monoton wachsend ist, dass \( f : D_1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : D_2 \rightarrow \mathbb{R} \) gilt.

Konstruktion der expliziten Form der Umkehrfunktion:

Setze \( f(x) = y \)

Dann gilt

\[ y = 2 \left[ \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{7}{4} \right] \]

\[ \frac{y}{2} - 7 = \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 \]

\[ \frac{\sqrt{y/2 - 7}}{2} = x - \frac{1}{2} \]

\[ x = \frac{\sqrt{y/2 - 7}}{2} + \frac{1}{2} \quad (\ast) \]

Definiere \( f_1 := f|_{D_1} \) [d.h. \( f_1 \) ist die Funktion \( f \), die man auf \( D_1 \) einstrahlt]

\( f_2 := f|_{D_2} \) [analoga 1]

Aus (\ast) folgt

\( f_1^{-1} : [1, \infty) \rightarrow (-\infty, 1], f_1^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{x}{2} - 7} + 1 \)

\( f_2^{-1} : [1, \infty) \rightarrow [1, \infty), f_2^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x}{2} - 7} + 1 \)
2. Aufgabe

(a)

Es wird zunächst per vollständige Induktion gezeigt, daß gilt:

Für eine Abbildung \( f : A \rightarrow B \) zwischen zwei endlichen Mengen \( A \) und \( B \) gilt:

\[
\text{f injectiv } \iff |f(A)| = |A|
\]

\( |A| \) bezeichnet die Anzahl der Elemente der entsprechenden endlichen Menge.

Beweis von "\( \Rightarrow \)"

per Induktion nach der Anzahl der Elemente von \( A \).

Durch Aufstellen

Sei \( |A| = 1 \).

Da \( A \) nur ein Element enthält, ist \( f \) automatisch injectiv, was wir aber nicht nötig haben, da dann

\[|f(A)| = 1 = |A| \]

"\( \Rightarrow \)" ist bewiesen.

Induktional kann

Es gelte die Aussage "\( f \) injectiv \( \Rightarrow |f(A)| = |A| \)"

für alle Mengen \( A \) mit \( |A| = n \).

Sei nun \( A \) eine Menge mit \( |A| = n + 1 \) und \( f : A \rightarrow B \) injectiv. Dann folgt \( A \) wie in (a) mit

\[A = \tilde{A} \cup \{a_0\} \text{ aus, wobei } \tilde{A} \subset A \text{ mit } |\tilde{A}| = n, a_0 \in A, a_0 \notin \tilde{A}.\]

Offenbar ist auch die Einschränkung von \( f \) auf \( \tilde{A} \) injectiv.
Nach Induktionsannahme ist \( |f(A)| = |A| = n \).
Da \( f \) injektiv ist, gilt \( f(a_0) \neq f(a) \) für alle \( a_0, a \in A \). Also ist \( |f(A)| = |f(A)| + 1 = n + 1 \), womit \( |f(A)| = |A| \) gilt. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist die Aussage für alle \( n \in \mathbb{N} \) bewiesen.

Beweis von \( \subseteq \) :

Beweis per Kontraktion, d.h. \( \subseteq \) wird gezeigt

\[ f \text{ nicht injektiv } \Rightarrow |f(A)| < |A| \]

Da eine Abbildung höchstens genauso viele Bilder wie Ur bilde hat, gilt \( |f(A)| \leq |A| \) für alle \( A \). 
\( \subseteq \) sei die Menge der Bilder der Menge \( A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \) mit \( f(a_1) = f(a_2) \).

\[ \Rightarrow \{ f(a_1), \ldots, f(a_n) \} = \{ f(a_1), \ldots, f(a_n) \} \quad \text{mit } \{ f(a_1), \ldots, f(a_n) \} \]

\[ \Rightarrow |f(A)| \leq |A| + 1. \]

(i) Sei jetzt \( M = \{1, 2, \ldots, n+1\} \), \( N = \{1, 2, \ldots, n\} \).

Also gilt eine injektive Funktion \( f: M \rightarrow N \).

Nach dem oben gezeigten gilt dann

\[ |f(M)| = |M| = n + 1 \]

Da aber \( f(M) \subseteq N \), ist auch \( |f(M)| \leq n \) folgendermaßen.

Also existiert keine injektive Abbildung

\( f: M \rightarrow N \).
(ii) \textbf{Aug.} Es existiert eine injektive Abbildung \( g: N \rightarrow M \).

Einerseits gilt \( |g(N)| \leq |N| = n \),
andererseits ist \( g(N) = M \) und damit
\( |g(N)| = |M| = n + 1 \).

Damit existiert ein solches \( g \) nicht.

(g) Seien nun \( M \) und \( N \) endliche Mengen mit
\( |M| = |N| \) und \( f: M \rightarrow N \) eine Funktion.

Eigentlich "\( f \) injektiv \( \Rightarrow \) "

Sei also \( f \) injektiv. Dann ist \( |f(M)| = |M| \).
Da \( |M| = |N| \) gilt, folgt \( |f(M)| = |N| \).

Die Funktion "\( f \) surjektiv" bedeutet, dass \( f(M) = N \) gilt. Also ist \( f \) surjektiv.

\( f \) surjektiv \( \Rightarrow \) "\( f \) injektiv".

Sei also \( f \) surjektiv. Dann gilt \( |f(M)| = |N| \),
also auch \( |f(M)| = |N| = |M| \), womit
\( f \) injektiv ist.

Die übrigen Implikationen sind nun trivial:

Sei \( f \) surjektiv. Dann ist \( f \) injektiv, da \( f \) surjektiv und

Sei \( f \) injektiv. Dann ist \( f \) nach Voraussetzung surjektiv.

\( f \) bijectiv.
3. Aufgabe
(a) \( \Rightarrow \):

Sei \( f \) injektiv. Dann gibt es in jedem \( y \in f(M) \) genau ein \( x \) mit \( f(x) = y \). (\(*\))

Definiere nun die Funktion \( g: N \rightarrow M \) durch

\[
g(y) = \begin{cases} 
  x & \text{jefalls } y \in f(M) \\
  \text{beliebiges Element aus } M, \text{ falls } y \notin f(M) 
\end{cases}
\]

Sei nun \( x \in M \). Dann gilt offenbar \( g(x) \in f(M) \).

Also ist \( g(f(x)) = x \), da für \( y = f(x) \) dasjenige Element aus \( M \) ist, das \( (\*) \) erfüllt.

\( \Leftarrow \)

Es gebe eine Funktion \( g: N \rightarrow M \) mit

\[
g(f(x)) = x \quad \text{f.a. } x \in M.
\]

Ang. \( f \) ist nicht injektiv. Dann gibt es \( x_1, x_2 \in M \) mit \( x_1 \neq x_2 \) und \( f(x_1) = f(x_2) \).

Dann kann aber nicht

\[
g(f(x_1)) = x_1 \quad \text{und} \quad g(f(x_2)) = x_2
\]

gelten, da \( x_1 \neq x_2 \) und \( g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \) gilt.

Also ist \( f \) nicht injektiv.

(b) \( \Rightarrow \):

Sei \( f \) injektiv. Dann gibt es für alle \( y \in N \)

(\text{mimdestens}) ein \( x \in M \) mit \( f(x) = y \). Für jedes \( y \in N \)

(\text{existiert} \( x \)) so gewählt, dass \( f(x) = y \) gilt.

Definiere \( h: N \rightarrow M \) durch \( h(y) := x \), wenn \( y \in N \) und \( x \) gemäß \( (\ast) \) gewählt ist. Dann gilt

\[
f(h(y)) = f(x) = y.
\]
Es gebe eine Funktion \( h : N \to M \) mit \( f(h(y)) = y \) für alle \( y \in N \).
Wir zeigen, dass \( f \) dann injektiv sein muss.
Sei also \( y \in N \) vorgegeben. Wähle \( x := h(y) \in M \).
Dann gilt \( f(x) = f(h(y)) = y \). Also ist \( y \in f(M) \)
und \( f \) ist injektiv.

(c) Sei \( f \) bijektiv und \( g : N \to M \) mit \( g(f(x)) = x \)
für \( x \in M \).
Er zeigt: \( g = f^{-1} \).

1. Lösung

Nach Voraussetzung ist \( f^{-1} \) die eindeutige Funktion
von \( N \) nach \( M \), die jedes \( y \in N \), das das
eindeutige Bild eines Elements \( x \in M \) unter \( f \),
"umkehrend" auf das \( x \) abbildet.
Offenbar ist diese Eigenschaft von \( g \) für alle
\( y \in f(M) \) erfüllt wegen \( g(f(x)) = x \) für \( x \in M \).
Da \( f \) bijektiv ist, gilt \( f(M) = N \). Damit
ist \( g = f^{-1} \).

2. Lösung

\( f^{-1} : N \to M \)
Man kann die inverse Funktion durch die folgende
Eigenschaft definieren: \( \forall x \in M \) gilt \( f^{-1}(f(x)) = x \) (1)
und für alle \( y \in N \) gilt \( f(f^{-1}(y)) = y \) (2).
Da (1) von \( f \) erfüllt wird, erfüllt \( f^{-1} \) nach (2):
Sei \( y \in N \). Da \( f \) bijektiv ist, existiert ein eindeutiges \( x \in M \) mit
\( f(x) = y \). Dann gilt \( g(y) = g(f(x)) = x \).
Damit ist \( f(f^{-1}(y)) = f(x) = y \). Insgesamt folgt \( g = f^{-1} \).
4. Aufgabe

(i) Sei \( f(x) = px + q \), \( p \in \mathbb{R} \), \( q \in \mathbb{R} \), schräge oder horizontale asymptote von \( f \) in Richtung \( \infty \).

Dann gilt also

\[
\lim_{x \to \infty} \{ f(x) - (px + q) \} = 0
\]

Da \( x \to \frac{x}{x} \) für \( x \to \infty \) gegen 0 strebt, folgt mit der Übertragung der Grenzwertregeln für Folgen auf Funktionen

\[
\lim_{x \to \infty} \left\{ \frac{1}{x} \left[ f(x) - px - q \right] \right\} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \to \infty} \left[ f(x) - px - q \right] = 0
\]

Damit gilt

\[
\lim_{x \to \infty} \left\{ \frac{f(x)}{x} - p - \frac{q}{x} \right\} = 0
\]

\[
\lim_{x \to \infty} \left\{ \frac{f(x)}{x} \right\} = p - \lim_{x \to \infty} \frac{q}{x} = 0
\]

Also \( \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = p \)

(ii) Dies ist trivial, denn:

\[
0 = \lim_{x \to \infty} \left\{ f(x) - px - q \right\} = \lim_{x \to \infty} \left\{ f(x) - px - q \right\}
\]

⇒ \( \lim_{x \to \infty} \left\{ f(x) - px \right\} = q \)
(b) Die Funktion \( f(x) \) ist in \( x = -1 \) nicht
definiert, da der Nenner des Termes für \( f \)
dort gleich 0 ist. Für alle \( x \in (-1, 1) \)
ist \( f \) definiert. Die maximale Definition.
Gleich ist also \( D = (-1, 1) \).

\[ \]

(c) Es liegt eine vertikale Asymptote in \( x = -1 \) vor.
Es gilt nämlich

(1) \( \lim_{x \to -1} f(x) = -\infty \)

(2) \( \lim_{x \to -1} f(x) = \infty \)

Beweis von (1):

Sei \( x < -1 \) angenommen und \( M < 0 \) beliebige
Schranke. Es gilt dann

\[ f(x) = \frac{x(x - 1)}{x + 1} \leq M \]

\[ \iff x(x - 1) > M(x + 1) \]

\[ \iff x^2 - (M + 1)x - M > 0 \]
\[ \Rightarrow \quad x^2 + Mx - M - x - M > 0 \]

\[ \Rightarrow \quad \frac{x^2}{x} > M - 1 \]

\[ \Rightarrow \quad \frac{x}{x-1} > 0 \]

\[ \Rightarrow \quad \frac{1}{x-1} > 1 \]

\text{Der Nenner } x^2 - Mx - M - x \text{ konvergiert für } x \to -1, x < -1, \text{ gegen } 2. \text{ Daher existiert ein } \varepsilon > 0, \text{ so daß } f(a, x < -1) \text{ mit } |x - (-1)| < \varepsilon \]

\[ x^2 - Mx - M - x > 0 \text{ gilt. Für solche } x \text{ gilt dann auch } f(x) < M. \]

\text{Beweis von (2):}

Sei \( x > -1 \) angenommen und \( C > 0 \) beliebige Schranke. Es gilt dann

\[ f(x) = \frac{x(x-1)}{x + 1} > C \]

\[ \Rightarrow \quad x(x-1) > C(x+1) \]

\[ \Rightarrow \quad x^2 - CX - C - x > 0 \]

\text{Der Nenner } x^2 - CX - C - x \text{ konvergiert für } x \to -1, x > -1, \text{ gegen } 2. \text{ Daher kann folgendes werden: daß ein } \varepsilon > 0 \text{ existiert mit }

\[ f(x) > M \text{ für alle } x \in \mathbb{R}_{> -1} \text{ mit } |x - (-1)| \leq \varepsilon \]

\text{Also gilt } \lim_{x \to -1} f(x) = \infty.
Es wird nun behauptet, dass die Gerade \( r(x) = x - 2 \)

relative asymptotische von \( f \) sowohl in \( +\)-Richtung als auch in \( -\)-Richtung ist.

Es gilt

\[
\frac{f(x)}{x} = \frac{x(x-1)}{x+1} \rightarrow \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}
\]

Der Nenner \( \frac{1}{x+1} \) strebt mit \( x \to \infty \) als auch für \( x \to -\infty \) gegen 1.

Der Nenner \( -\frac{1}{x+1} \) strebt in beiden Fällen gegen 0.

Dadurch gilt

\[
\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1
\]

Weiter ist

\[
f(x) - x = \frac{x(x-1) - (x+1) \cdot x}{x+1} = \frac{-2x}{x+1} = \frac{-2}{1+\frac{1}{x}}
\]

Also \( \lim_{x \to \infty} \{f(x) - x\} = -2 \) und \( \lim_{x \to -\infty} \{f(x) - x\} = -2 \).

Daraus folgt unmittelbar \( \lim_{x \to \infty} \{f(x) - (x-2)\} = 0 \)

und \( \lim_{x \to -\infty} \{f(x) - (x-2)\} = 0 \).

Damit sind alle asymptotischen gefunden. Es leiste nochmals noch verhältnis asymptotisch geben. Da \( x = -1 \) eine der einzige Polstelle von \( f \) ist, gibt es diese nicht.
Bemerkung: Führt man eine Polynomsdivision

\[
\frac{x^2 - x}{x^3 + 1} = \frac{x - 2}{x^2 + x}
\]

\[
\begin{array}{c}
-2x \\
\hline
-2x - 2 \\
\hline
2
\end{array}
\]

durch, so kann man sehr leicht aus dieser gelenkten Darstellung \( g(x) = \frac{2}{x^2 + x} \) das asymptotische Verhalten für \( x \to \infty \) bzw. \( x \to -\infty \) ableiten. Unter Berücksichtigung von \( \lim_{x \to \infty} \frac{2}{x^2 + x} = 0 \) und \( \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x^2 + x} = 0 \), sieht man, dass \( g(x) = x - 2 \)

Asymptote von \( f \) in \( \infty \)-Richtung und
\((-\infty)\)-Richtung ist.