Prof. Dr. W. Arendt
F. Stoffers

Wintersemester 2011/2012
29. Dezember 2011

Mathematische Grundlagen der Ökonomie I

# Probeklausur

Die Aufgaben sind für eine zweistündige Klausur ausgelegt. Ein einfacher Taschenrechner ist als Hilfsmittel erlaubt. Bitte begründen Sie alle Ergebnisse und achten Sie auf einen sauberen, übersichtlich gehaltenen Aufschrieb.
Viel Erfolg!

**1. Aufgabe** (3+3=6 Punkte)

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim Lotto "6 aus 49" genau 3 gezogene Zahlen gerade sind?

(b) Es werde zufällig eine 7-stellige Zahl gewählt, wobei jede Zahl von 1000000 bis 9999999 mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftrete. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle 7 Ziffern paarweise verschieden sind?

**2. Aufgabe** (3+3=6 Punkte)
Beweisen Sie die folgenden Aussagen per vollständiger Induktion:

(a) $$1 + 4 + 7 + ... + (3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2} \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$
wobei der Ausdruck auf der linken Seite zuerst mit Hilfe des Summenzeichens $\sum$ ausgedrückt werden soll.

(b) $3^n - 3$ ist durch 6 teilbar für alle $n \in \mathbb{N}$.

**3. Aufgabe** (2+3+2=7 Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $a_n = \frac{2n^8-2n^2+1}{(n^4+5)^2},\ n \in \mathbb{N}$

(b) $b_n = \sqrt{6n^6+n^3} - \sqrt{6n^6-n^3-n},\ n \in \mathbb{N}$

(c) $c_n = \sin(\frac{1}{n})\cos(n\frac{\pi}{2})(-1)^{2n+7},\ n \in \mathbb{N}$

**4. Aufgabe** (10 Punkte)
Untersuchen Sie jede der folgenden Aussagen darauf hin, ob sie wahr oder falsch ist (Es wird keine Begründung verlangt, die Aussagen sollen lediglich mit "wahr" oder "falsch" bewertet werden, eine falsche Antwort gibt einen negativen Punkt, eine richtige einen Punkt):

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}e^{7x} = 0$.

(b) $K_0\big(1+\frac{p}{1200}\big)^7$ ist das Kapital, das man ausgehend von einem Startkapital $K_0$ bei einem Jahreszins von $p$ (in Prozent angegeben) bei monatlicher Zinsauszahlung nach 7 Monaten erhält.

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} - 1$ für alle $q \in \mathbb{R}$ mit $q \neq 1$.

(d) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 4−mal differenzierbare Funktion mit $f^{(4)}(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $f^{(3)}(0) = 27$. Dann existiert ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = \pi$.

(e) Die Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(n) = n + 1$ ist surjektiv.

(f) Es sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2e^x$. Dann gibt es ein $x_0 \in (0, 1)$ mit $f'(x_0) = e$.

(g) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = 7x^4 + 27x^2$, ist konvex.

(h) Jede stetige Funktion $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ besitzt ein Maximum.

(i) Es sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = 27x^{10} - 18x^3 - 1$. Dann existiert ein $x_0 \in [0, 1]$ mit $f(x_0) = 7$.

(j) Es sei $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $x_0 \in (0, 1)$ mit $f'(x_0) = 0$. Dann besitzt $f$ in $x_0$ ein lokales Extremum.

**5. Aufgabe** (4+5=9 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die globalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x$$

auf dem Intervall $[-10, 0]$.

(b) Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 - 4x + 10$. Untersuchen Sie die Funktion auf lokale Extrema und bestimmen Sie die Bereiche, in denen die Funktion monoton wachsend und die Bereiche, in denen sie monoton fallend ist. (*Hinweis: Man überzeuge sich davon, dass $f'(-1) = 0$ gilt.*)

**6. Aufgabe** (3+5=8 Punkte)

(a) Bei einem Ratensparvertrag wird ein nomineller Jahreszinssatz von $3,6\%$ vereinbart. Es werden vom 1. Januar 2012 bis zum 1. September 2020 jeweils am 1. Januar, 1. Mai und 1. September jeden Jahres jeweils 700 Euro eingezahlt. Über welchen Betrag kann am 31.12.2020 verfügt werden, wenn die Zinsen am Ende jeden Dritteljahres gutgeschrieben werden?

(b) Eine Privatperson nimmt einen Kredit der Höhe $K$ bei einem Jahreszins von 10% über eine Laufzeit von 10 Jahren auf. Wie groß darf die geliehene Summe höchstens ausfallen, wenn die Person am Ende jeden Jahres eine Tilgungszahlung von 1000 Euro leistet und am Ende der Laufzeit die Kreditforderungen beglichen sein sollen?

**7. Aufgabe** (2+2+2+2=8 Punkte)
Geben Sie den Definitionsbereich der folgenden Funktionen an und bestimmen Sie anschließend ihre Ableitung in den Differenzierbarkeitspunkten.

(a) $f(x) = \cos(x)e^{-x^2+1}$

(b) $f(x) = \ln(\ln(x))$

(c) $f(x) = \frac{\sqrt{\exp(x^4)}}{x-2}$

(d) $f(x) = \left(1 + x^2\right)^{\sin(x)}$