Prof. Dr. W. Arendt
F. Stoffers

Wintersemester 2011/2012
16. Januar 2012

Mathematische Grundlagen der Ökonomie I

12. Übungsblatt

Abgabe: *Montag, 23. Januar 2012, 10:00 Uhr, O28-H22*

Bitte begründen Sie alle Ergebnisse. Viel Erfolg!

1. Aufgabe (2+2+3=7 Punkte)

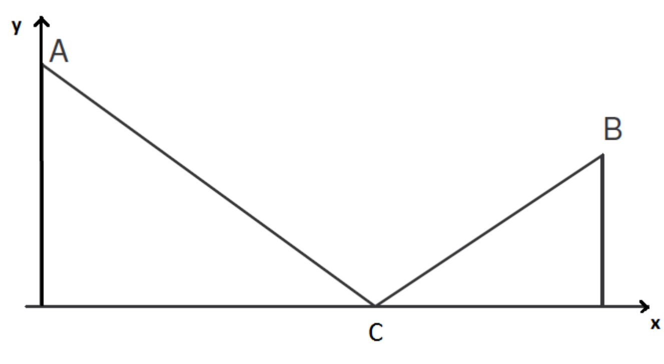
(a) Untersuchen Sie, ob bei den folgenden Funktionen, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind, an der Stelle x_0 ein Extremum vorliegt oder nicht (falls ja, handelt es sich um ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum?):

(i) $f(x) = 2x^6 - 12x^5 + 30x^4 - 40x^3 + 30x^2 - 12x + 6$, $x_0 = 1$

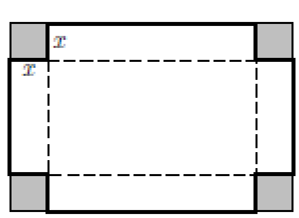
(ii) $g(x) = x^3 \exp(-x)$, $x_0 = 0$

(b) In welchen Punkten des Definitionsbereiches nimmt die Funktion $h : [1, 5] \to \mathbb{R}$, definiert durch $h(x) = x^2 \exp(-x)$, ihr Maximum an?

2. Aufgabe (6 Punkte)
Zwei Orte A und B mit den Koordinaten $A = (0, 3), B = (5, 2)$ sollen einen gemeinsamen Bahnhof C mit den Koordinaten $C = (x_0, 0)$ erhalten, der auf einer Eisenbahnlinie, beschrieben durch die Menge der Punkte $(x, 0), x \in \mathbb{R}$, liegt. Wohin ist der Bahnhof zu legen, damit die Gesamtlänge der neu zu errichteten Straßen, die entlang der geraden Verbindungslinien von den Orten A bzw. B zum Bahnhof gebaut werden sollen, und damit auch die Kosten für den Straßenbau minimal werden?



3. Aufgabe (6 Punkte)
Aus einer Blechtafel mit $480mm$ Länge und $300mm$ Breite soll ein oben offener quaderförmiger Behälter entstehen. Dazu werden an den vier Ecken quadratische Ausschnitte herausgeschnitten, so dass die dadurch entstandenen Seitenteile hochgebogen werden können. Diese werden dann an den Kanten miteinander verschweißt. Welche Kantenlänge x müssen die herausgeschnittenen Eckstücke haben, damit das Volumen des Behälters möglichst groß wird? Wie groß wird dann das Volumen?



4. Aufgabe (4+2+2=8 Punkte)
Gegeben sei die reelle Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$.

(a) Untersuchen Sie f auf Nullstellen, Extrema und Wendepunkte.

(b) Geben Sie die Bereiche an, in denen f konvex bzw. konkav ist.

(c) Skizzieren Sie den Graphen von f.

5. Aufgabe (6 Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden Aussagen auf ihre Richtigkeit durch Angabe von "wahr" bzw. "falsch" (Eine stichwortartige Begründung der Entscheidung (z.B. Angabe eines Gegenbeispiels im Falle der Falschheit) geben einen halben Zusatzpunkt):

(a) Sei f ein Polynom 2. Grades. Dann ist jedes lokale Minimum sogar ein (globales) Minimum.

(b) Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und $x_0 \in (a, b)$ eine Wendestelle von f. Dann ist $f''(x_0) = 0$.

(c) Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und $x_0 \in (a, b)$ mit $f''(x_0) = 0$. Dann hat f in x_0 eine Wendestelle.

(d) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $f'(x) = 2f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$. Dann gilt $f(100) = e^{200}$.

(e) Jede beschränkte, differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt ein Extremum.

(f) Jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = -\infty$ besitzt ein Maximum.