Prof. Dr. W. Arendt
F. Stoffers

Wintersemester 2011/2012
30. Januar 2012

Mathematische Grundlagen der Ökonomie I

14. Übungsblatt

Abgabe: *Montag, 06. Februar 2012, 10:00 Uhr, O28-H22*

Bitte begründen Sie alle Ergebnisse. Viel Erfolg!

1. Aufgabe (1,5+3+2,5=7 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle ersten partiellen Ableitungen der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, die definiert wird durch

$$f(x, y, z) = e^{x+2y} + 2x \sin(z) + z^2 xy.$$

(b) Bestimmen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen der Funktion $g : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die definiert wird durch

$$g(x, y) = x^2 y^3 + y \ln(x).$$

(c) Gibt es eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f_x(x, y) = f_y(x, y) = xy$?

2. Aufgabe (2*(1,5+1,5+1)+4=12 Punkte)

(a) Gegeben sind die Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f_1(x, y) = x$$
$$f_2(x, y) = x^2 - y^2$$

Zur Veranschaulichung im $\mathbb{R}^3$ bestimme und skizziere man für $i \in \{1, 2\}$

(i) die Niveaulinien zum Niveau $c \in \{-1, 0, 1\}$, d.h. zu gegebenem $c \in \{-1, 0, 1\}$ alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $f_i(x, y) = c$ (für festes i sind die Linien, welche mit den entsprechenden c-Werten zu beschriften sind, in ein einziges zweidimensionales Koordinatensystem einzuzeichnen),

(ii) die Graphen von $x \mapsto f_i(x, y_0), y \mapsto f_i(x_0, y), t \mapsto f_i(tx_0, ty_0)$, wobei x_0, y_0 feste reelle Zahlen seien,

(iii) den Graphen von f_i.

(b) Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definiert durch $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Zeichnen Sie folgende Punktmengen im $\mathbb{R}^3$:

$$M_0 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0\}$$
$$M_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 1\}$$
$$M_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 4\}$$

Gibt es Funktionen $h_i : D_i \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2\}$, so dass die Mengen M_1 und M_2 dargestellt werden können als $M_1 = \{(x, y, h_1(x, y)) : (x, y) \in D_1\}$ und $M_2 = \{(x, y, h_2(x, y)) : (x, y) \in D_2\}$?

3. Aufgabe (5+5=10 Punkte)
Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der folgenden Funktionen:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

(b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(x, y) = e^{-x^2}(4y + x^2 - y^2)$.

4. Aufgabe (9 Punkte)
In welchen Punkten nimmt die Funktion $f : D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 2\} \to \mathbb{R}$, die definiert ist durch $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$, ihr (globales) Minimum und (globales) Maximum an?