Prof. Dr. W. Arendt
F. Stoffers

Wintersemester 2011/2012
06. Februar 2012

Mathematische Grundlagen der Ökonomie I

15. Übungsblatt

Abgabe: *Montag, 13. Februar 2012, 10:00 Uhr, O28-H22*

Bitte begründen Sie alle Ergebnisse. Viel Erfolg!

1. Aufgabe (4+5=9 Punkte)

(a) Bestimmen Sie innerhalb der Menge der in der Ebene $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$ enthaltenen Punkte diejenigen Punkte, welche zu $(1, 0, 0)$ minimalen Abstand besitzen.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatorregel diejenigen Punkte auf der Kugeloberfläche $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, die zum Punkt $(1, 1, 1)$ den kleinsten bzw. größten Abstand besitzen. Begründen Sie dafür zunächst, dass es derartige Punkte überhaupt gibt.

2. Aufgabe (6 Punkte)
Gegeben seien n, $n \in \mathbb{N}$, Punkte $a^1, ..., a^n \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass der "Mittelpunkt" $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a^k$ der eindeutige Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ ist, für den die Summe der Abstandsquadrate zu den Punkten a^k, d.h. $f(x) = \sum_{k=1}^n |x - a^k|^2$, minimal wird. Dabei ist der Abstand zweier Punkte $x, y \in \mathbb{R}^n$ wie gewohnt definiert durch $|x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$.

3. Aufgabe (4+3=7 Punkte)
Zeigen Sie, dass das Kriterium aus Satz (28.8) zur Untersuchung auf lokale Extrema bei den vorliegenden Funktionen nicht anwendbar ist. Bestimmen Sie trotzdem alle lokalen und globalen Extrema.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy + 1$

(b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$.

4. Aufgabe (3+2+2+3+3=13 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass folgende Mengen offen sind:
  (i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 2\}$
  (ii) $(-10, -6) \cup (-5, -1)$ (Die Intervalle sind Intervalle in $\mathbb{R}$)

(b) Zeigen Sie, dass folgende Mengen abgeschlossen sind:
  (i) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : |x_i| \leq 1$ für $i = 1, 2, 3\}$
  (ii) $\{x \in \mathbb{R}_{>0} : \frac{K(x)}{x} \leq c\}$, wobei $K : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, definiert durch $K(x) = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3$, eine Kostenfunktion mit $k_0 > 0$ und $c > 0$ eine konstante Zahl ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Menge $[-1, 1] \setminus \{0\}$ weder offen noch abgeschlossen in $\mathbb{R}$ ist.