Prof. Dr. W. Arendt
F. Stoffers

Wintersemester 2011/2012
07. November 2011

Mathematische Grundlagen der Ökonomie I

4. Übungsblatt

Abgabe: *Montag, 14. November 2011, 10:00 Uhr, O28-H22*

Bitte begründen Sie alle Ergebnisse. Viel Erfolg!

1. Aufgabe (3+3=6 Punkte)
Gegeben seien zwei reelle Zahlenfolgen durch

- $a_n := 5 + \frac{10}{2^n}, n \in \mathbb{N}$
- $b_n := \frac{1}{n^2 - \frac{15}{2}n}, n \in \mathbb{N}$

Bestimmen Sie die Grenzwerte a bzw. b der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Geben Sie jeweils zu gegebenem $\epsilon > 0$ $n_0 \in \mathbb{N}$ und $m_0 \in \mathbb{N}$ an, so dass $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$ und $|b_n - b| < \epsilon$ für alle $n \geq m_0$.

2. Aufgabe (2+2+2=6 Punkte)
Bestimmen Sie unter Anwendung der Rechenregeln für Grenzwerte die Grenzwerte der folgenden reellen Zahlenfolgen definiert durch

(a) $a_n := (\frac{3n}{2n!} - 4)(|3(-1)^n - (-1)^{n+1}|), n \in \mathbb{N}$

(b) $b_n := \frac{2n^2+3}{4n^2+5n}, n \in \mathbb{N}$

(c) $c_n := \frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{\frac{1}{2}n^4}, n \in \mathbb{N}$.

3. Aufgabe (3+3=6 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die $|x^2 - 4x| > 2$ gilt.

(b) Bestimmen Sie die Menge aller $y \in \mathbb{R}$, für die $10 < |5y - 2| \leq 100$ gilt.

4. Aufgabe (3+2+1=6 Punkte)
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die reelle Zahlenfolge, welche den Startwert $a_1 = 100$ besitzt und der Rekursionsbeziehung $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ genügt.

(a) Zeigen Sie, dass die Folge beschränkt mit Werten im Intervall $(4, 100]$ (also dass, für alle $n \in \mathbb{N}$ $4 < a_n \leq 100$ gilt) und monoton fallend ist und somit nach einem Satz aus der Vorlesung konvergiert.

(b) Bestimmen Sie eine explizite Formel für das n-te Folgenglied a_n, welche a_n als Funktion des Index n darstellt (wie z.B. $a_n = 7n^2 - 2$).

(c) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5. Aufgabe (3+3=6 Punkte)
Der monatliche Bestand einer Kaninchenpopulation genüge den folgenden Regeln:

- Im ersten Monat existiert genau ein Kaninchenpaar.
- Jedes Paar Kaninchen wirft pro Monat genau ein weiteres Paar Kaninchen.
- Ein neugeborenes Paar bekommt erst im zweiten Lebensmonat Nachwuchs.

- Die Tiere befinden sich in einem abgeschlossenen Raum, so dass kein Tier die Population verlassen (insbesondere keines stirbt) und keines von außen hinzu kommen kann.

(a) Begründen Sie, dass man den monatlichen Bestand $f_n, n \in \mathbb{N}$, (die Anzahl der Paare, die in diesem Monat leben) durch die rekursive Beziehung $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, n \in \mathbb{N}$, modellieren kann, wenn man $f_0 = 0$ setzt. Geben Sie zusätzlich $f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8$ an.

(b) Beweisen Sie per vollständiger Induktion, dass $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
Hinweis: Das Beweisprinzip der vollständigen Induktion kann so modifiziert werden, dass man im Induktionsschluss annehmen darf, dass die Aussage für alle natürlichen Zahlen kleiner als $n+1$ *anstatt nur für* n *gelte.*