

Mathematische Grundlagen der Ökonomie I

6. Übungsblatt

Abgabe: Montag, 28. November 2011, 10:00 Uhr, O28-H22

Bitte begründen Sie alle Ergebnisse. Viel Erfolg!

1. Aufgabe (2+8=10 Punkte)

(a) Zeigen Sie:

Sei $a_n, n \in \mathbb{N}$, eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sei konvergent. Dann ist $a_n, n \in \mathbb{N}$, eine Nullfolge.

(b) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n + n}$

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^{3^n}}$

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1+\frac{10}{n})}{(n+2)^3}$

Hinweis zu (iii): Zeigen Sie $\frac{(n!)^2}{(2n)!} \leq 2^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

2. Aufgabe (3+3=6 Punkte)

Es sei f eine reellwertige Funktion, die auf ganz \mathbb{R} definiert ist. Wenn folgende Bedingung gilt:

Für alle $M > 0$ existiert $x_0 \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \geq x_0$ $f(x) \geq M$ gilt.

Dann schreibt man $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$. Für $a \in \mathbb{R}$ schreibt man $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$, wenn die Bedingung

Für alle $\epsilon > 0$ existiert $x_0 \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \geq x_0$ $|f(x) - a| \leq \epsilon$ gilt.

erfüllt ist. Analog definiert man $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$, wenn die Bedingung

Für alle $M > 0$ existiert $x_0 \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \leq x_0$ $f(x) \geq M$ gilt.

und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$, wenn die Bedingung

Für alle $\epsilon > 0$ existiert $x_0 \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \leq x_0$ $|f(x) - a| \leq \epsilon$ gilt.

erfüllt ist.

Zeigen Sie unter Verwendung der Definition der Exponentialfunktion $\exp(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ für $x \in \mathbb{R}$:

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty$ (Hinweis: Bernoulli-Ungleichung)

(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$ (Hinweis: Teil (a) und Exponentialgesetz)

3. Aufgabe (3+3+3=9 Punkte)

Ein Stifter lobt einen Ökonomiepreis aus, der am ersten Tag jedes Jahres vergeben wird und eine gleichbleibende Höhe von x Euro hat. Das Stiftungskapital beträgt vor der ersten Preisverleihung 10.000.000 Euro.

(a) Wie groß darf x höchstens sein, wenn das Kapital jährlich mit 5% verzinst wird und der Preis ewig vergeben werden soll?

- (b) Wie oft kann der Preis ausgezahlt werden, wenn er mit 600.000 Euro dotiert wird und die Verzinsung weiterhin bei 5% liegt?
- (c) Welcher Zinssatz wäre nötig, damit der Preis mit 3.800.000 Euro dotiert werden und 3 mal ausgeschüttet werden kann?

4. Aufgabe (4 Punkte)

Ein Investor hat in eine Villa in Südkalifornien investiert. Da die Bank ihm seinen Kredit gekündigt hat, muss er sofort einen Betrag in Höhe von 1,5 Millionen US-Dollar zurückzahlen. Diese Summe muss er sich leihen und steht dabei vor der Wahl zwischen vier Krediten mit einer Laufzeit von je 5 Jahren, die nach Ablauf der Laufzeit getilgt werden. Das Angebot der Gönndirwas GmbH hat einen Jahreszins von 15,5% bei monatlicher Verzinsung, die Carpediem AG erhebt einen Jahreszins von 16% und verzinst den Kredit halbjährlich. Die Schnellkredit AG und die Goldgrube GmbH verzinsen jeweils jährlich mit den folgenden Zinssätzen:

	1.Jahr	2.Jahr	3.Jahr	4.Jahr	5.Jahr
Schnellkredit AG	14%	15%	17%	18%	19%
Goldgrube GmbH	19%	18%	17%	15%	14%

Für welchen Kredit sollte der Investor sich entscheiden?