Prof. Dr. W. Arendt
F. Stoffers

Wintersemester 2011/2012
05. Dezember 2011

Mathematische Grundlagen der Ökonomie I

8. Übungsblatt

Abgabe: *Montag, 12. Dezember 2011, 10:00 Uhr, O28-H22*

Bitte begründen Sie alle Ergebnisse. Viel Erfolg!

1. Aufgabe (5 Punkte)
Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = 2x^2 - 4x + 16$ für $x \in \mathbb{R}$. Geben Sie die maximalen Definitionsbereiche D_1 und D_2 an, so dass f in D_1 streng monoton fallend und in D_2 streng monoton wachsend ist. Bestimmen Sie anschließend die Umkehrfunktionen der Einschränkungen von f auf D_1 bzw. D_2 unter Angabe der zugehörigen Definitions- und Bildbereiche.

2. Aufgabe (4+5=9 Punkte)

(a) Es seien $n \in \mathbb{N}$, M, N Teilmengen der natürlichen Zahlen definiert durch $M = \{1, 2, ..., n+1\}$ und $N = \{1, 2, ..., n\}$. Zeigen Sie
   (i) Es gibt keine injektive Funktion von M nach N.
   (ii) Es gibt keine surjektive Funktion von N nach M.

(b) Seien M und N endliche Mengen gleicher Mächtigkeit und $f : M \to N$ eine Funktion. Beweisen Sie, dass gilt
$$f \text{ injektiv } \Leftrightarrow f \text{ surjektiv } \Leftrightarrow f \text{ bijektiv }.$$

3. Aufgabe (3+3+2=8 Punkte)
Seien M und N beliebige Mengen und $f : M \to N$ eine Funktion. Zeigen Sie:

(a) f injektiv $\Leftrightarrow$ Es existiert eine Funktion $g : N \to M$ mit $g(f(x)) = x$ für alle $x \in M$.

(b) f surjektiv $\Leftrightarrow$ Es existiert eine Funktion $h : N \to M$ mit $f(h(y)) = y$ für alle $y \in N$.

(c) Ist f bijektiv und $g : N \to M$ mit $g(f(x)) = x$ für alle $x \in M$, so ist $g = f^{-1}$.

4. Aufgabe (2+2+4=8 Punkte)
Man nennt die Gerade $x = a$, wobei $a \in \mathbb{R}$ ist, eine **vertikale Asymptote** der reellen Funktion f, die in a nicht definiert ist, wenn
$$\lim_{x\to a, x<a} f(x) \text{ gleich } \infty \text{ oder } -\infty \text{ oder } \lim_{x\to a, x>a} f(x) \text{ gleich } \infty \text{ oder } -\infty \text{ gilt.}$$
Man bezeichnet eine Gerade $g(x) = px + q$ mit $p, q \in \mathbb{R}$ als **schräge** ($p \neq 0$) oder **horizontale** ($p = 0$) **Asymptote** von f in Richtung ∞ bzw. $-\infty$, falls gilt
$$\lim_{x\to\infty} \big(f(x) - g(x)\big) = 0 \text{ bzw. } \lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - g(x)\big) = 0\ .$$

(a) Zeigen Sie:
Ist $g(x) = px + q$ schräge oder horizontale Asymptote von f in Richtung ∞ bzw. $-\infty$, so gilt
   (i) $p = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ bzw. $p = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$
   (ii) $q = \lim_{x\to\infty} \big(f(x) - px\big)$ bzw. $q = \lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - px\big)$

(b) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der reellen Funktion $f(x) = \frac{x(x-1)}{x+1}$ an und skizzieren Sie den Graphen von f.

(c) Finden Sie alle Asymptoten von f (mit herleitender Rechnung).