Maßtheorie

Wolfgang Arendt

Vorlesung im WS 2016/17

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Das Lebesguemaß wurde 1901 von Henri Lebesgue (1875–1941) eingeführt und ist der heute allgemein benutzte Integralbegriff. In dieser Vorlesung geben wir eine möglichst direkte Einführung. Wegen der Bedürfnisse in der Wahrscheinlichkeitstheorie werden allgemeine Maßräume behandelt. Die Existenz des Lebesguemaßes beweisen wir zunächst nicht, stellen sie aber als Theorem zur Verfügung. Dadurch gelangen wir zügig zu den Konvergenzsätzen, die die Stärke des Integralbegriffes zeigen.

Literatur:

R. G. Bartle: *The Elements of Integration and Lebesgue Measure.* John Wiley;
ist eine kompakte Einführung, die sich sehr gut als Begleittext eignet.

J. Elstrodt: *Maß- und Integrationstheorie.* Springer, Berlin;
ist ein sehr schön geschriebenes ausführliches Textbuch, das viele weitergehende Informationen liefert.

Ulm, im Oktober 2016 Wolfgang Arendt

1 Maßtheorie

Sei Ω eine Menge. Axiomatisch wollen wir Teilmengen definieren, denen wir später ein Volumen (genauer ein Maß) zuordnen können. Eine gewisse Reichhaltigkeit wird verlangt. Für $\Omega = \mathbb{R}$ stammt die folgende Definition von Lebesgue. Abstrakt wurde sie später von Fréchet 1917 getroffen.

Definition 1.1. *Eine Menge $\Sigma \subset \mathcal{P}(\Omega)$, also eine Menge von Teilmengen von Ω, heißt **σ-Algebra**, falls*

(a) $\emptyset, \Omega \in \Sigma$,

(b) $A \in \Sigma \Rightarrow A^c \in \Sigma$,

(c) $A_n \in \Sigma, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Sigma$.

(Ω, Σ) *heißt dann ein **messbarer Raum**.*

Die Elemente von Σ nennt man dann **messbare Mengen**. Hier ist $A^c = \Omega \setminus A$ das Komplement von A.

Eigenschaften 1.2. (a) $A, B \in \Sigma \Rightarrow A \cup B, A \cap B, A \setminus B, A \triangle B \in \Sigma$.
(b) $A_n \in \Sigma \Rightarrow \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Sigma$.

Beispiele 1.3. (a) $\Sigma = \{\emptyset, \Omega\}$.
(b) $\Omega = \mathbb{R}$, $\Sigma = \{\emptyset, \mathbb{R}, (-\infty, 0), [0, \infty)\}$.
(c) $\Omega = \mathbb{R}$, $\Sigma = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ abzählbar oder } A^c \text{ ist abzählbar}\}$.

Satz 1.4. *Sei $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Es gibt eine kleinste σ-Algebra Σ, sodass $\mathcal{B} \subset \Sigma$.*
Bezeichnung: $\sigma(\mathcal{B}) := \Sigma$.

Beweis. a) Seien $\Sigma_i, i \in I$, σ-Algebren. Dann ist $\bigcap\limits_{i\in I} \Sigma_i$ eine σ-Algebra.
b) $\sigma(\mathcal{B}) = \bigcap\limits_{\substack{\Sigma\ \sigma\text{-Algebra} \\ \mathcal{B}\subset\Sigma}} \Sigma$. □

Wichtiges Beispiel 1.5. Sei Ω ein metrischer Raum (allgemeiner: ein topologischer Raum). Die kleinste σ-Algebra $\mathcal{B}(\Omega)$, die alle offenen Teilmengen von Ω enthält, heißt die **Borelalgebra** (oder **Borelsche σ-Algebra**). Ihre Elemente heißen **Borelmengen**.

Hier interessieren wir uns insbesondere für $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Eigenschaften 1.6. a) Jede abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ ist eine Borelmenge.
b) Sei $d = 1, \mathcal{B} = \{[a, b) : -\infty < a < b < \infty\}$. Es ist $\sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
c) Sei $d \in \mathbb{N}$ beliebig, $\mathcal{B} := \{\prod_{j=1}^{d} [a_j, b_j) : -\infty < a_j < b_j < \infty\}$. Dann ist $\sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.
d) Alle Intervalle sind in $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.
e) Jede abzählbare Teilmenge A von $\mathbb{R}^d$ ist eine Borelmenge.
f) $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \neq \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Der Nachweis von a) - e) wird als Übungsaufgabe gelassen, f) beweisen wir später.

Aufgabe 1.7. Sei Ω ein metrischer Raum, $O \subset \Omega$ offen. Zeige, dass $\mathcal{B}(O) = \{A \in \mathcal{B}(\Omega) : A \subset O\}$.

Definition 1.8 (Maß)**.** *Sei Σ eine σ-Algebra über Ω. Ein* ***Maß*** *ist eine Abbildung $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ derart, dass*

(a) $\mu(\emptyset) = 0$;

(b) $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ falls $A_n \in \Sigma, A_n \cap A_m = \emptyset$ für $n \neq m$.

Die Eigenschaft (b) heißt ***σ-Additivität****. Man nennt (Ω, Σ, μ) einen* ***Maßraum****. Er heißt* ***endlich****, falls $\mu(\Omega) < \infty$. Falls $\mu(\Omega) = 1$, so spricht man von einem* ***Wahrscheinlichkeitsraum****.*

Folgerungen 1.9. Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum. Dann gilt

(a) $\mu(A) \leq \mu(B)$ falls $A, B \in \Sigma, A \subset B$;

(b) $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$, falls $A, B \in \Sigma, A \subset B, \mu(A) < \infty$;

(c) $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sup \mu(A_n)$ wenn $A_n \subset A_{n+1},\ A_n \in \Sigma$;

(d) $\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \inf \mu(A_n)$ wenn $A_n \in \Sigma, A_{n+1} \subset A_n, \mu(A_1) < \infty$.

(e) $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, wenn $A_n \in \Sigma$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. (a) Es ist $B = A \dot{\cup} (B \setminus A)$. Damit ist $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$. Ist $\mu(A) < \infty$, so ist $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$. Damit ist auch (b) bewiesen.
(c) Setze $B_n := A_n \setminus A_{n-1}, n \in \mathbb{N}$, wobei $A_0 := \emptyset$. Dann ist $B_n \cap B_m = \emptyset$ für $n > m$, da $B_n \subset A_{n-1}^c$ und $B_m \subset A_m \subset A_{n-1}$. Ferner ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n =: A$. Damit folgt aus

der σ-Additivität, dass $\mu(A) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$.
1. Fall: $\mu(A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\mu(B_n) = \mu(A_n) - \mu(A_{n-1})$. Also ist

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} (\mu(A_n) - \mu(A_{n-1})) \\
&= \lim_{m\to\infty} (\mu(A_m) - \mu(A_0)) \\
&= \lim_{m\to\infty} \mu(A_m)\ ,\ \text{da } A_0 = \emptyset\ .
\end{aligned}$$

2. Fall: Ist $\mu(A_n) = \infty$ für ein n, so ist $\mu(A_m) = \infty$ für alle $m \geq n$ und $\mu(A) = \infty$.
(d) Sei $A_{n+1} \subset A_n \subset A_1, \mu(A_1) < \infty$. Sei $B_n := A_1 \setminus A_n, A := \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Dann ist $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_1 \setminus A_n = \left(A_1 \setminus \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = A_1 \setminus A$. Da $B_n \subset B_{n+1}$, folgt aus (c) dass $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) = \mu(A_1 \setminus A) = \mu(A_1) - \mu(A)$. Aber $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(\mu(A_1) - \mu(A_n)) = \mu(A_1) - \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n))$. Also ist $\mu(A) = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$.
(e) Sei $A_n \in \Sigma$. Sei $B_1 := A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, \ldots, B_n := A_n \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1})$. Dann ist $\bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ und $B_m \cap B_n = \emptyset$ für $n \neq m$. Damit ist $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(B_k) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_k)$, da $B_k \subset A_k$. $\square$

Beispiel 1.10 (Dirac-Maß)**.** Sei (Ω, Σ) ein messbarer Raum, $a \in \Omega$. Dann definiert

$$\delta_a(A) := \begin{cases} 1 & a \in A \\ 0 & a \notin A \end{cases}$$

ein Maß $\delta_a \colon \Sigma \to [0, \infty]$. Es heißt das *Dirac-Maß* in a.

Definition 1.11 (Borelmaß)**.** *Sei Ω ein topologischer Raum. Ein* ***Borelmaß*** *μ ist ein Maß auf $\mathcal{B}(\Omega)$.*

2 Das Lebesguemaß

Im nächsten Satz wird die Existenz des wichtigsten Maßes auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ gezeigt, nämlich des Lebesguemaßes. Wir verzichten bewusst auf einen Beweis um schneller das Lebesgueintegral kennenzulernen und zu studieren. Wir empfehlen, den Beweis später im Buch von Bartel nachzulesen, wenn etwas mehr Erfahrung gesammelt wurde. Er ist elegant und ein sehr schönes Stück Mathematik. Auch wenn wir dieses wichtige Beispiel nur durch die Formulierung des folgenden Theorems vorstellen, so sind wir in der Lage alle Eigenschaften des Lebesguemaßes daraus herzuleiten. Nur dieses Beispiel wird in der Vorlesung nicht durch einen Beweis untermauert. Ansonsten verfolgen wir systematisch unseren axiomatischen Aufbau mit vollständigen Beweisen.

Theorem 2.1 (Lebesguemaß)**.** *Es gibt genau ein Maß λ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, sodass*

$$\lambda\left(\prod_{j=1}^{d}[a_j,b_j)\right)=\prod_{j=1}^{d}(b_j-a_j)\,.$$

*λ heißt das **Lebesguemaß** (oder Lebesgue-Borelmaß).*

Das Lebesguemaß ist also das eindeutig bestimmte Borelmaß auf $\mathbb{R}^d$, das auf Quadern mit dem Volumen übereinstimmt. Den Beweis der Eindeutigkeit werden wir später nachholen.

Folgerungen 2.2 (Translationsinvarianz)**.**

a) $\lambda(A+x) = \lambda(A) \quad \forall\, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), x \in \mathbb{R}^d$

b) $\lambda(A) = 0\,,$ wenn A abzählbar ist .

Beweis. a) Sei $x \in \mathbb{R}^d$. Wir setzen $A+x := \{a+x : a \in A\}$ für alle $A \subset \mathbb{R}^d$. Es gilt $A+x \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Denn $\Sigma := \{A \subset \mathbb{R}^d : A+x \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ist eine σ-Algebra, die die offenen Mengen enthält (man prüfe das nach !). Somit ist $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \Sigma$ nach Definition von Σ. Genauso ist $\Sigma' := \{B \subset \mathbb{R}^d \colon B-x \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Damit ist für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ auch $(A-x)+x \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Nun definiert $\mu(A) := \lambda(A+x)$ auch ein Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, das auf Quadern mit dem Volumen übereinstimmt. Wegen der Eindeutigkeit in Theorem 2.1 gilt $\mu = \lambda$.
b) Übungsaufgabe. □

Beispiel 2.3 (nicht messbare Menge)**.** Wir konstruieren eine Menge $E \subset [0,1]$, die nicht Borel-messbar ist. Dazu definieren wir die Äquivalenzrelation

$$x \sim y :\Leftrightarrow x-y \in \mathbb{Q}$$

auf $\mathbb{R}$. Sei $\{K_i : i \in I\}$ die Menge der Äquivalenzklassen. Es ist also

$$K_i \cap K_j = \emptyset \text{ für } i \neq j \ , \ \bigcup_{i \in I} K_i = \mathbb{R} \ .$$

Ferner gilt $K_i \cap [0,1) \neq \emptyset$ für alle $i \in I$. Sei nämlich $x \in K_i$. Es gibt genau ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $x \in [n, n+1)$. Damit ist $y = x - n \in [0,1)$. Da $x \sim y$, ist $y \in K_i$. Wir wählen aus jeder Menge $K_i \cap [0,1)$ ein Element e_i und setzen $E := \{e_i : i \in I\}$. Dann ist E keine Borelmenge. Angenommen nämlich, es wäre $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Dann ist

$$S := \dot{\bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]}} (E + r) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \ .$$

Wegen der σ-Additivität des Lebesguemaßes ist

$$\lambda(S) = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} \lambda(E + r) = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} \lambda(E) \ .$$

Da $S \subset E + [-1,1] \subset [0,1] + [-1,1] \subset [-1,2]$, folgt dass $\lambda(S) \leq 3$. Damit ist $\lambda(E) = 0$ und auch $\lambda(S) = 0$. Auf der anderen Seite ist $[0,1) \subset S$. Denn sei $x \in [0,1)$. Dann gibt es $e \in E$, sodass $x \sim e$, also $r := x - e \in \mathbb{Q}$. Da $x, e \in [0,1)$, ist $r \in (-1,1)$. Also ist $x = e + r \in S$. Wegen der Monotonie des Lebesguemaßes folgt $1 = \lambda((0,1)) \leq \lambda(S)$, ein Widerspruch! $\square$

Bemerkung. a) Das Argument zeigt, dass es kein translationsinvariantes Maß $\mu \colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ gibt derart, dass $\mu([a,b)) = b - a$ für $-\infty < a < b < \infty$.
b) Es zeigt auch folgendes. Sei Σ eine σ-Algebra mit $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \Sigma$ und $\mu \colon \Sigma \to [0,\infty]$ ein translationsinvariantes Maß, sodass $\mu(A) = \lambda(A)$ für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Dann ist $E \notin \Sigma$.

Definition und Satz 2.4 (induziertes Maß)**.** Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum, $A \in \Sigma$. Definiere $\Sigma_A := \{B \in \Sigma : B \subset A\}, \mu_A(B) := \mu(B)$. Dann ist (A, Σ_A, μ_A) ein Maßraum. Wir schreiben oft μ statt μ_A.

Beispiel. Sei $A \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \Sigma_A := \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) : B \subset A\}$. Dann heißt λ_A das **Lebesguemaß** auf A.

3 Nullmengen

Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum.

Definition 3.1. *$A \subset \Omega$ heißt **Nullmenge**, wenn es eine Menge $B \in \Sigma$ gibt mit $\mu(B) = 0$ und $A \subset B$.*

Eigenschaften 3.2. a) Teilmengen von Nullmengen sind Nullmengen.
b) Abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind Nullmengen.

Beispiele 3.3 (Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$)**.** a) Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $\lambda(\{x\}) = 0$.

Beweis. $\{x\} = \bigcap(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$ $\lambda(\{x\}) = \inf \lambda((x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})) = \inf \frac{2}{n} = 0$.
b) Abzählbare Mengen sind Borelmengen und Nullmengen (wir sagen **borelsche Nullmengen**).
c) $\mathbb{Q}$ ist eine Nullmenge.
Interessanter ist die folgende Menge.

Beispiele 3.4 (Cantormenge)**.** Setze $C_1 := [0,1] \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, d.h. man nimmt aus dem Intervall $C_0 = [0,1]$ das offene mittlere Drittel heraus. Nun nimmt man aus den beiden Teilintervallen von C_1 wieder das mittlere Drittel heraus, d.h. man setzt

$$C_2 := \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] .$$

Sukzessive konstruiert man C_n aus C_{n-1}, indem man jedes Teilintervall von C_{n-1} drittelt und das mittlere offene Intervall herausnimmt. Damit erhält man kompakte Mengen

$$C_n \subset C_{n-1} \subset \ldots \subset C_1 \subset [0,1] .$$

Man definiert nun die **Cantormenge** C durch

$$C := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n .$$

Sie hat sehr interessante Eigenschaften. Zunächst einmal ist sie abgeschlossen als Durchschnitt abgeschlossener Mengen. Damit ist sie kompakt. Für die Maßtheorie sind folgende beiden Eigenschaften von Bedeutung:

(a) $\lambda(C) = 0$;

(b) C ist überabzählbar.

Folgende topologische Eigenschaften sind bemerkenswert:

(c) C ist **total unzusammenhängend**, d. h. C enthält kein Intervall;

(d) C enthält keine **isolierten Punkte**.

Ist $A \subset \mathbb{R}$, so heißt $x \in A$ **isolierter Punkt** von A, falls es $\delta > 0$ gibt derart, dass

$$A \cap (x-\delta, x+\delta) = \{x\} \ .$$

Wir beweisen (a) und (b).

a) Da in jedem Schritt das mittlere Drittel herausgenommen wird, ist

$$\lambda(C_n) \leq \frac{2}{3}\lambda(C_{n-1}) \ .$$

Also ist

$$\lambda(C_n) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N}) \ .$$

Folglich ist $\lambda(C) \leq (\frac{2}{3})^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $\lambda(C) = 0$.
b) Jede Zahl $x \in [0,1]$ kann man schreiben als

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}$$

mit $x_k \in \{0,1,2\}$ (triadische Entwicklung). Man sieht nun leicht, dass

$$C_n = \{x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k} : x_j \in \{0,2\} \text{ für } j = 1, \ldots, n\} \ .$$

Damit ist

$$C = \{x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k} : x_j \in \{0,2\} \text{ für alle } j \in \mathbb{N}\} \ .$$

Diese Darstellung der Elemente von C ist eindeutig:
Sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{3^k}$ wobei $x_k, y_k \in \{0,2\}$. Angenommen, es gibt $k \in \mathbb{N}$ sodass $x_k \neq y_k$. Sei $k_0 = \min\{k \in \mathbb{N} : x_k \neq y_k\}$. Sei etwa $x_{k_0} = 0, y_{k_0} = 2$. Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k} &\leq \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{2}{3^k} = \frac{2}{3^{k_0+1}} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right) \\ &= \frac{2}{3^{k_0+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3^{k_0}} \end{aligned}$$

und damit $y - x \geq \frac{1}{3^{k_0}} > 0$. Das widerspricht unserer Annahme. Damit gibt es also zu jedem $x \in C$ genau eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\{0,2\}$, sodass

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k} \ .$$

Wir zeigen nun mit Hilfe von Cantors Diagonalargument, dass C nicht abzählbar ist. Sei $\{x^m : m \in \mathbb{N}\}$ eine Folge in C. Schreibe x^m eindeutig als

$$x^m = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^m 3^{-k}$$

mit $x_k^m \in \{0, 2\}$. Setze

$$\begin{aligned} y_k &= 2 \text{ wenn } x_k^k = 0 \text{ und} \\ y_k &= 0 \text{ wenn } x_k^k = 2 \ . \end{aligned}$$

Dann ist

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{3^k} \in C \ .$$

Sei m beliebig. Dann ist $y_m \neq x_m^m$. Also ist $y \neq x^m$. Wir haben gezeigt, dass $y \notin \{x^m : m \in \mathbb{N}\}$. Damit ist jede abzählbare Teilmenge von C verschieden von C. □

Bemerkung. Die Cantormenge ist das erste Fraktal, das in der Mathematik gefunden wurde. Man kann leicht sehen, dass

$$C_n = \frac{1}{3} C_{n-1} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} C_{n-1} \right) \ ,$$

wobei $\frac{1}{3} C_{n-1} = \left\{ \frac{x}{3} : x \in C_{n-1} \right\}$. Es werden also immer kleinere ähnliche Mengen produziert.

Beispiele 3.5 (Nullmengen im $\mathbb{R}^d$)**.** Betrachte den Maßraum $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$, also das Lebesguemaß λ auf den Borelmengen.

a) Jede abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ ist eine Borelsche Nullmenge.

b) Geraden sind Nullmengen im $\mathbb{R}^2$.

c) Ebenen sind Nullmengen im $\mathbb{R}^3$.

d)

$$\begin{aligned} \lambda\left(\prod_{j=1}^{d} [a_j, b_j] \right) &= \lambda\left(\prod_{j=1}^{d} (a_j, b_j) \right) \\ &= (b_1 - a_1) \dots (b_d - a_d) \ . \end{aligned}$$

Es ist also belanglos, ob ich abgeschlossene, offene, oder halboffene Quader betrachte: das Maß ist dasselbe.

e) Es gibt Nullmengen in $\mathbb{R}$, die nicht Borel-messbar sind (ein Kardinalitätsargument).

Definition 3.6 (charakteristische Funktion)**.** *Sei Ω eine Menge, $A \subset \Omega$. Setze*

$$1_A(x) := \begin{cases} 1 & \textit{wenn} \quad x \in A \\ 0 & \textit{wenn} \quad x \notin A \ . \end{cases}$$

*$1_A : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt die **charakteristische Funktion** von A.*

Definition 3.7 (fast überall)**.** *Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum. Zu jedem $x \in \Omega$ sei $P(x)$ eine Aussage. Man sagt, dass $P(x)$ **fast überall** gilt (Abk.: f. ü.), falls die Menge*

$$A := \{x \in \Omega : P(x) \textit{ ist falsch } \}$$

eine Nullmenge ist.

Beispiele 3.8. a) Es ist $1_{\mathbb{Q}}(x) = 0$ f.ü. wobei $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ der zugrundeliegende Maßraum ist.
b) Sei $\Omega = [0,1], \Sigma = \mathcal{B}(\Omega), \lambda$ das Lebesguemaß auf Ω. Definiere

$$f_n : \Omega \to \mathbb{R} \text{ durch } f_n(x) = x^n \ .$$

Dann gilt

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0 \quad \text{ f. ü. } .$$

Definition 3.9. *Ein Maßraum (Ω, Σ, μ) heißt **vollständig**, falls jede Nullmenge in Σ liegt.*

Satz 3.10 (Vervollständigung)**.** *Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum. Setze*

$$\tilde{\Sigma} := \{B \subset \Omega : \exists A \in \Sigma \quad B \triangle A \textit{ ist eine Nullmenge } \} \ .$$

Dann ist $\tilde{\Sigma}$ eine σ-Algebra. Durch

$$\tilde{\mu}(B) := \mu(A)$$

für $B \subset \Omega, A \in \Sigma$ mit $B \triangle A$ Nullmenge wird ein Maß auf $\tilde{\Sigma}$ definiert, das μ fortsetzt und sodass $(\Omega, \tilde{\Sigma}, \tilde{\mu})$ vollständig ist.

Wir lassen den Nachweis als Übungsaufgabe. Dazu gehört auch der Nachweis, dass $\tilde{\mu}$ wohldefiniert ist: Für $B \subset \Omega$ und $A_1, A_2 \in \Sigma$, für die $B_1 \triangle A_1$ und $B_2 \triangle A_2$ Nullmengen sind, gilt $\mu(A_1) = \mu(A_2)$.

Bemerkung. (Vervollständigung des Lebesguemaßes).
Sei $(\mathbb{R}^d, \tilde{B}(\mathbb{R}^d), \tilde{\lambda})$ die Vervollständigung von $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$. Dann ist $\tilde{\lambda}$ translationsinvariant (Übungsaufgabe). Die im Beispiel 2.3 konstruierte Menge liegt also nicht in $\tilde{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^d)$. Manchmal ist diese (triviale) Erweiterung der Borel-σ-Algebra nützlich.

4 Messbare Funktion

Sei (Ω, Σ) ein messbarer Raum, also eine Menge mit einer σ-Algebra.

Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Für $t \in \mathbb{R}$ benutzen wir abkürzend folgende Bezeichnungen:

$$\{f > t\} := \{x \in \Omega : f(x) > t\} \; ;$$
$$\{f < t\}, \{f \geq t\}, \{f \leq t\} \text{ entsprechend } .$$

Lemma 4.1. *Folgende Aussagen sind äquivalent.*

(i) $\{f > t\} \in \Sigma$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$*;*

(ii) $\{f \geq t\} \in \Sigma$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$*;*

(iii) $\{f < t\} \in \Sigma$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$*;*

(iv) $\{f \leq t\} \in \Sigma$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$*.*

Beweis. Sei $t \in \mathbb{R}$. Da $\{f > t\}^c = \{f \leq t\}, \{f < t\}^c = \{f \geq t\}$ gilt $(i) \Leftrightarrow (iv)$ und $(iii) \Leftrightarrow (ii)$. Wegen $\{f > t\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{f \geq t + \frac{1}{n}\right\}$ gilt $(ii) \Rightarrow (i)$. Man sieht $(i) \Rightarrow (ii)$ aus $\{f \geq t\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{f > t - \frac{1}{n}\right\}$. □

Definition 4.2. *Eine Funktion* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *heißt* ***Σ-messbar*** *(oder kurz* ***messbar*** *wenn* Σ *festliegt) falls die äquivalenten Bedingungen von Lemma 4.1 erfüllt sind.*

Im Fall von $\Omega = \mathbb{R}^d$ *und* $\Sigma = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ *spricht man von* ***Borel-messbaren*** *Funktionen, bei* $\Sigma = \tilde{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ *von den* ***Lebesgue-messbaren*** *Funktionen.*

In Wirklichkeit sind nicht nur die Urbilder von Intervallen, sondern die Urbilder aller Borelmengen messbar wie der folgende Satz zeigt. Sein Beweis beruht auf dem „Prinzip der guten Mengen“.

Satz 4.3. *Sei* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *messbar. Dann ist* $f^{-1}(\mathcal{B}) \in \Sigma$ *für alle* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*.*

Beweis. Sei $\mathcal{A} := \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : f^{-1}(\mathcal{B}) \in \Sigma\}$. Dann ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra, die $\mathcal{S} := \{(t, \infty) : t \in \mathbb{R}\}$ umfasst. Damit ist $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{S}) \subset \mathcal{A}$. □

Beispiele 4.4. Für $A \subset \Omega$ gilt: 1_A ist messbar, genau dann wenn $A \in \Sigma$.

Satz 4.5. *Seien* $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ *messbar. Dann gilt:*

(a) Die Funktionen $f + g, \alpha f$*, gegeben durch*

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &:= f(x) + g(x) \; , \\ (\alpha f)(x) &:= \alpha f(x) \end{aligned}$$

sind messbar, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$*.*

(b) *Die Funktion* $f \cdot g, f \wedge g, f \vee g, |f|, f^+, f^- : \Omega \to \mathbb{R}$ *gegeben durch*

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x) &:= f(x) \cdot g(x)\ , \\ (f \wedge g)(x) &:= \min\{f(x), g(x)\}\ , \\ (f \vee g)(x) &:= \max\{f(x), g(x)\}\ , \\ |f|(x) &:= |f(x)|\ , \\ f^+ &= f \vee 0, f^- = (-f)^+\end{aligned}$$

sind messbar.

(c) *Ist* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *Borel-messbar, so ist* $\varphi \circ f$ *messbar.*

Beweis. a) Seien $\alpha \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$.
1. Fall: $\alpha > 0$. Dann gilt

$$\{\alpha f > t\} = \{f > \frac{t}{\alpha}\} \in \Sigma\ .$$

2. Fall: $\alpha = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}\{\alpha f > t\} = \emptyset \in \Sigma \quad &\text{wenn} \quad t \geq 0 \text{ und} \\ \{\alpha f > t\} = \Omega \in \Sigma \quad &\text{wenn} \quad t < 0\ .\end{aligned}$$

3. Fall: $\alpha < 0$. Dann ist

$$\{\alpha f > t\} = \{f < \frac{t}{\alpha}\} \in \Sigma\ .$$

Also ist αf messbar. Für $r \in \mathbb{Q}$ definiere

$$S_r := \{f > r\} \cap \{g > t - r\} \in \Sigma\ .$$

Dann ist

$$\{f + g > t\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} S_r \in \Sigma\ ,$$

denn für $x \in \Omega$ mit $f(x) + g(x) > t$ ist $f(x) > t - g(x)$. Also gibt es $r \in \mathbb{Q}$ derart, dass $f(x) > r > t - g(x)$. Das zeigt die Inklusive „$\subset$“. Umgekehrt ist $S_r \subset \{f + g > t\}$ für alle $r \in \mathbb{Q}$, womit die Gleichheit der beiden Mengen gezeigt ist. Damit haben wir gezeigt, dass $f + g$ messbar ist.
b) Wir zeigen zunächst, dass f^2 messbar ist. Sei $t \in \mathbb{R}$.
1. Fall: $t \leq 0$. Dann ist $\{f^2 \geq t\} = \Omega \in \Sigma$.
2. Fall: $t > 0$. Dann ist

$$\{f^2 \geq t\} = \{f \geq \sqrt{t}\} \cup \{f \leq -\sqrt{t}\} \in \Sigma\ .$$

Wir haben gezeigt, dass f^2 messbar ist. Da $f \cdot g = \frac{1}{2}((f + g)^2 - f^2 - g^2)$, folgt auch die Messbarkeit von $f \cdot g$. Als nächstes zeigen wir, dass f^+ messbar ist. Sei $t \in \mathbb{R}$.
1. Fall: $t < 0$. Dann ist $\{f^+ > t\} = \Omega \in \Sigma$.
2. Fall: $t \geq 0$. Dann ist

$$\{f^+ > t\} = \{f > t\} \in \Sigma\ .$$

Also ist f^+ messbar. Aus a) folgt, dass auch $f^- = (-f)^+$ messbar ist. Damit ist auch $|f| = f^+ + f^-$ messbar. Da $f \vee g = f + (g-f)^+$ und $f \wedge g = -((-f) \vee (-g))$ sind auch diese Funktionen messbar.
c) Es ist $\{\varphi \circ f > t\} = \{x \in \Omega : f(x) \in \{\varphi > t\}\} = f^{-1}(\{\varphi > t\}) \in \Sigma$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Beachte, dass (t, ∞) offen und damit $\{\varphi > t\} = \varphi^{-1}((t,\infty)) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist. $\square$

Die Zerlegungen

$$\begin{aligned} f &= f^+ - f^- \ , \\ |f| &= f^+ + f^- \end{aligned}$$

und auch die Beziehungen

$$f \vee g = f \vee (g-f)^+$$

sollte man sich an einer Zeichnung klarmachen und merken. Sie werden oft gebraucht.
Wir wollen auch Funktionen betrachten, die die Werte $\pm\infty$ annehmen.

Definition 4.6. *Wir setzen*

$$\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\} =: [-\infty, \infty] \ .$$

*Eine Funktion $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ heißt **messbar**, falls $\{f > t\} \in \Sigma$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Wir setzen*

$$\mathcal{M}(\Omega, \Sigma, \bar{\mathbb{R}}) := \{f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}} \text{ messbar}\} \ .$$

Bemerkung. Lemma 4.1 gilt auch für eine Funktion $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$.

Lemma 4.7. *Eine Funktion $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ ist genau dann messbar, wenn*

$$\begin{aligned} \Omega_\infty &:= \{x \in \Omega : f(x) = \infty\} \in \Sigma \ , \\ \Omega_{-\infty} &:= \{x \in \Omega : f(x) = -\infty\} \in \Sigma \text{ und} \end{aligned}$$

$f : \Omega \setminus (\Omega_\infty \cup \Omega_{-\infty}) \to \mathbb{R}$ messbar ist.

Beweis. Sei $A := \Omega \setminus (\Omega_\infty \cup \Omega_{-\infty})$.
„$\Rightarrow$“ Sei $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar. Dann sind

$$\begin{aligned} \Omega_\infty &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{f > n\} \in \Sigma \text{ und} \\ \Omega_{-\infty} &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{f < -n\} \in \Sigma \ . \end{aligned}$$

Für $t \in \mathbb{R}$ ist

$$\{f_{|A} > t\} = \{f > t\} \cap A \in \Sigma \ .$$

„$\Leftarrow$“ Seien $\Omega_\infty, \Omega_{-\infty} \in \Sigma$. Somit ist $A \in \Sigma$. Sei $f_{|A} : A \to \mathbb{R}$ messbar. Dann ist für $t \in \mathbb{R}$,

$$\{f > t\} = \{x \in A : f_{|A}(x) > t\} \cup \Omega_\infty \in \Sigma \ .$$

Also ist $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar. $\square$

Bemerkung. Mit Lemma 4.7 sieht man, dass Satz 4.5 auch für $f, g \in \mathcal{M}(\Omega, \Sigma, \bar{\mathbb{R}})$ richtig bleibt, falls $\{f = \infty\} \cap \{g = -\infty\} = \emptyset$ und $\{f = -\infty\} \cap \{g = \infty\} = \emptyset$.

Satz 4.8. *Sei* $f_n \in \mathcal{M}(\Omega, \Sigma, \bar{\mathbb{R}}), n \in \mathbb{N}$. *Dann gilt*

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n,\ \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n,\ \liminf_{n\to\infty} f_n,\ \limsup_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{M}(\Omega, \Sigma, \bar{\mathbb{R}}) \ ,$$

wobei $(\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n)(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ *etc.*

Beweis. Für $t \in \mathbb{R}$ ist

$$\{\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n \geq t\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{f_n \geq t\} \in \Sigma \ .$$

Somit ist $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \mathcal{M}(\Omega, \Sigma, \bar{\mathbb{R}})$. Damit ist auch

$$\sup f_n = -\inf(-f_n) \in \mathcal{M}(\Omega, \Sigma) \ .$$

Folglich ist auch

$$\limsup_{n\to\infty} f_n = \inf_m \sup_{n\geq m} f_n \in \mathcal{M}(\Omega, \Sigma) \ ,$$

genauso

$$\liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n = \sup_m \inf_{n\geq m} f_n \ .$$

□

Korollar 4.9. Sei $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar, sodass

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ für alle } x \in \Omega$$

existiert. Dann ist $f : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar.

Beweis. $f(x) = \liminf f_n(x)$. □

Korollar 4.10. Sei $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar, $n \in \mathbb{N}$. Setze

$$f(x) := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x), & \text{falls der Limes existiert,} \\ 0 & \text{falls er nicht existiert .} \end{cases}$$

Dann ist $f : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Definition 4.11. *Eine Funktion* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *heißt* ***einfach****, wenn sie nur endlich viele Werte annimmt.*

Folgerungen 4.12 (Standarddarstellung)**.** Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine einfache Funktion. Dann hat f die eindeutige Darstellung

$$f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j 1_{A_j}$$

mit $\alpha_j \in \mathbb{R}, \alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j, A_i \subset \Omega, \bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j = \Omega, A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$.

Beweis. Sei $f(\Omega) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ mit $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$. Setze $A_j = f^{-1}(\{\alpha_j\})$. $\square$

Bemerkung. Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ einfach mit Standardstellung $f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j 1_{A_j}$. Dann ist f messbar genau dann, wenn $A_j \in \Sigma$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Theorem 4.13. *Sei $f : \Omega \to [0, \infty]$ messbar. Dann gibt es einfache, messbare Funktionen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}_+$ mit*

(a) $0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq f \quad (n \in \mathbb{N})$;

(b) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *für alle* $x \in \Omega$.

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n2^n - 1\}$ setze

$$E_{k,n} := \{x \in \Omega : k2^{-n} \leq f(x) < (k+1)2^{-n}\}$$

und

$$E_{n2^n,n} := \{f \geq n\} \ .$$

Dann ist $E_{i,n} \cap E_{j,n} = \emptyset$ für $i \neq j$. Definiere nun

$$f_n := \sum_{k=0}^{n2^n} k2^{-n} 1_{E_{k,n}} \quad (n \in \mathbb{N}) \ .$$

Dann ist $0 \leq f_n \leq f, f_n \in \mathcal{M}(\Omega, \Sigma)$. Da

$$\begin{aligned}
E_{k,n} &= \{x \in \Omega : 2k2^{-(n+1)} \leq f(x) < (2k+2)2^{-(n+1)}\} \\
&= E_{2k,n+1} \cup E_{2k+1,n+1} \\
\text{und } f_n &= k2^{-n} = f_{n+1} \text{ auf } E_{2k,n+1} \\
\text{und } f_n &= k2^{-n} < (2k+1)2^{-(n+1)} = f_{n+1} \text{ auf } E_{2k+1,n+1} \ ,
\end{aligned}$$

ist $f_n \leq f_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Schließlich zeigen wir, dass $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in \Omega$. Sei $x \in \Omega$. Ist $f(x) = \infty$, so ist $x \in E_{n2^n,n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist $f_n(x) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim f_n(x) = \infty = f(x)$.

Ist $f(x) < \infty$, so ist $f(x) < n_0$ für $n_0 \in \mathbb{N}$ groß genug und für jedes $n \geq n_0$ gibt es $k \in \mathbb{N}$ sodass $x \in E_{k,n}$. Also ist

$$0 \leq f(x) - f_n(x) \leq 2^{-n} \text{ für } n \geq n_0 \ .$$

Damit ist $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in \Omega$. $\square$

Bemerkung. Ist f beschränkt, so konvergiert $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ sogar gleichmäßig gegen $f(x)$, d. h.

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\Omega} | f_n(x) - f(x) |= 0 \ .$$

Es gibt nämlich n_0 sodass $f(x) < n_0$ für alle $x \in \Omega$. Damit ist $0 \leq f(x) - f_n(x) \leq 2^{-n}$ für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in \Omega$. $\square$

5 Das Lebesgueintegral für positive messbare Funktionen

Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum. Wir setzen

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &:= \mathcal{E}(\Omega, \Sigma) := \{\varphi : \Omega \to \mathbb{R} : \text{ einfach und messbar}\} \ , \\ \mathcal{E}_+ &:= \{\varphi \in \mathcal{E} : \varphi(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in \Omega\} \ . \end{aligned}$$

Damit ist $\mathcal{E}$ ein Vektorraum und $\mathcal{E}_+$ ist ein positiver Kegel in $\mathcal{E}$; d. h.

$$\varphi, \psi \in \mathcal{E}_+ \Rightarrow \varphi + \psi \in \mathcal{E}_+, \alpha\varphi \in \mathcal{E}_+ \text{ für } (\alpha \geq 0) \ .$$

Definition 5.1. *Sei $\varphi \in \mathcal{E}_+$ mit Standarddarstellung*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i} \ .$$

Wir definieren

$$\int_\Omega \varphi d\mu := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i)$$

mit $0 \cdot \infty = 0, \alpha \cdot \infty = \infty$ wenn $\alpha > 0$.

Bemerkung. Die Funktion $\varphi \equiv 0$ hat die Standarddarstellung $\varphi = 0 \cdot 1_\Omega$. Damit ist $\int_\Omega \varphi d\mu = 0 \cdot \mu(\Omega) = 0$ nach unserer Konvention.

Als nächstes zeigen wir die Additivität und Homogenität des Integrals.

Satz 5.2. *Seien $f, g \in \mathcal{E}_+, \alpha \geq 0$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \int (f+g) d\mu &= \int f d\mu + \int g d\mu \\ \int (\alpha f) d\mu &= \alpha \int f d\mu \ . \end{aligned}$$

Zum Beweis benötigen wir einen Hilfssatz.

Lemma 5.3. *Sei $\varphi \in \mathcal{E}_+, \varphi = \sum\limits_{k=1}^{m} \beta_k 1_{B_k}$ mit $\beta_k \geq 0, B_k \in \Sigma, B_k \cap B_\ell = \emptyset$ für $k \neq \ell$. Dann ist*

$$\int \varphi d\mu = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \mu(B_k) \ .$$

Beweis. Setze $B_{m+1} := \Omega \setminus (B_1 \cup \ldots \cup B_m), \beta_{m+1} := 0$. Sei $\varphi = \sum_{j=1}^{n} \alpha_1 1_{A_j}$ die Standarddarstellung von φ. Dann gilt

$$\begin{aligned} A_j &= \dot{\bigcup_{k=1}^{m+1}} A_j \cap B_k, j = 1, \ldots, n \\ B_k &= \dot{\bigcup_{j=1}^{n}} A_j \cap B_k, k = 1, \ldots, m \ . \end{aligned}$$

Es handelt sich also in beiden Fällen um disjunkte Vereinigungen. Ist $A_j \cap B_k \neq \emptyset$, so gilt für $x \in A_j \cap B_k, \alpha_j = \alpha_j 1_{A_j}(x) = \varphi(x) = \beta_k 1_{B_k}(x) = \beta_k$; also $\alpha_j = \beta_k$. Damit ist

$$\begin{aligned} \int \varphi d\mu &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{k=1}^{m+1} \mu(A_j \cap B_k) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m+1} \beta_k \mu(A_j \cap B_k) \\ &= \sum_{k=1}^{m+1} \beta_k \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j \cap B_k) \\ &= \sum_{k=1}^{m+1} \beta_k \mu(B_k) \ . \end{aligned}$$

□

Beweis von Satz 5.2. a) Seien

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j 1_{A_j}, \psi = \sum_{k=1}^{m} \beta_k 1_{B_k}$$

jeweils in Standarddarstellung. Dann ist $\dot{\bigcup_{k=1}^{m}} B_k = \Omega$ und somit $A_j = \dot{\bigcup_{k=1}^{m}} B_k \cap A_j$. Folglich ist $\mu(A_j) = \sum_{k=1}^{m} \mu(B_k \cap A_j), j = 1, \ldots, n$. Genauso

$$\mu(B_k) = \sum_{j=1}^{n} \mu(B_k \cap A_j), k = 1, \ldots, m \ .$$

Es ist

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j 1_{A_j} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{k=1}^{m} 1_{B_k \cap A_j}, \psi = \sum_{j=1}^{m} \beta_k \sum_{j=1}^{n} 1_{B_k \cap A_j} \ , \ \varphi + \psi = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (\alpha_j + \beta_k) 1_{A_j \cap B_k}$$

(nicht Standard!). Aus Lemma 5.3 folgt

$$\begin{aligned}\int(\varphi+\psi)d\mu &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(\alpha_j+\beta_k)\mu(A_j\cap B_k)\\ &= \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mu(A_j)+\sum_{k=1}^{m}\beta_k\mu(B_k)\\ &= \int\varphi d\mu+\int\psi d\mu\ .\end{aligned}$$

b) $\int\alpha\varphi d\mu=\alpha\int\varphi d\mu$ folgt unmittelbar aus der Definition. □

Lemma 5.4. *Sei $\varphi\in\mathcal{E}_+$. Dann definiert*

$$\lambda(A):=\int_\Omega 1_A\varphi d\mu \quad (A\in\Sigma)$$

ein Maß auf Σ.

Beweis. a) $\lambda(\emptyset)=0$.
b) Sei $A=\dot{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}}A_k, A_k\in\Sigma$. Setze $B_n:=\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$. Dann ist $1_{B_n}\varphi=\sum\limits_{k=1}^{n}1_{A_k}\varphi$. Also ist

$$\begin{aligned}\lambda(B_n) &= \int 1_{B_n}\varphi d\mu=\sum_{k=1}^{n}\int 1_{A_k}\varphi\\ &= \sum_{k=1}^{n}\lambda(A_k)\ .\end{aligned}$$

Bleibt zu zeigen, dass $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda(B_n)=\lambda(A)$. Es ist $B_n\subset B_{n+1}$, $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}B_n=A$. Sei $\varphi=\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i 1_{C_i}$ Standard. Dann ist

$$\begin{aligned}\lambda(B_n) &= \int\varphi 1_{B_n}d\mu\\ &= \int\sum_{i=1}^{m}\alpha_i 1_{C_i\cap B_n}\\ &= \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\mu(C_i\cap B_n)\ .\end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\lambda(B_n) &= \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\mu(C_i\cap A)\\ &= \int\sum_{i=1}^{m}\alpha_i 1_{C_i\cap A}\,d\mu\\ &= \int\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i 1_{C_i}\right)\cdot 1_A\,d\mu\\ &= \lambda(A)\ .\end{aligned}$$

□

Nun definieren wir das Integral einer beliebigen positiven messbaren Funktion. Wir setzen

$$\mathcal{M}_+ := \mathcal{M}_+(\Omega,\Sigma) := \{f:\Omega\to[0,\infty]:\ \text{messbar}\}\ .$$

Definition 5.5. *Sei $f\in\mathcal{M}_+$.*
a)

$$\int f d\mu := \sup_{\substack{\varphi\le f\\ \varphi\in\mathcal{E}_+}}\int\varphi d\mu\in[0,\infty]\ ,$$

Diese Definition ist konsistent zur Definition 5.1, d.h. für $f\in\mathcal{E}_+$ erhält man hier denselben Integralwert wie zuvor.
b)

$$\int_A f d\mu := \int 1_A f d\mu\quad (A\in\Sigma)\ .$$

Beachte dass für $A\in\Sigma$ die Funktion $1_A f$ messbar ist (siehe Satz 4.5b).

Lemma 5.6. *Seien $f,g\in\mathcal{M}_+$.*
a) $f\le g\Rightarrow\int f d\mu\le\int g d\mu$.
b) Wenn $A,B\in\Sigma$ mit $A\subset B$, so gilt

$$\int_A f d\mu\le\int_B f d\mu\ .$$

Beweis. a) folgt aus der Definition.
b) folgt aus a). □

Wir beweisen nun den ersten der zwei wichtigsten Konvergenzsätze, den Satz über die monotone Konvergenz oder auch Satz von Beppo Levi, genannt nach seinem Entdecker Beppo Levi 1875–1961.

Theorem 5.7 (Beppo Levi 1906). *Sei* $f_n \in \mathcal{M}_+, f_n \leq f_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$.
Sei $f(x) := \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$. *Dann ist*

$$\int f d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n d\mu \ .$$

Bemerkung. Nach Satz 4.8 ist $f \in \mathcal{M}_+$. Wir dürfen also bei monotoner Konvergenz Integral und Limes (in $[0,\infty]$!) vertauschen.

Beweis. Da $f_n \leq f$, ist

$$\int f_n d\mu \leq \int f d\mu \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \ .$$

Folglich ist

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n d\mu \leq \int f d\mu \ .$$

Wir zeigen die umgekehrte Ungleichung. Sei $\varphi \in \mathcal{E}_+, \varphi \leq f$. Zu zeigen ist, dass

$$\int \varphi d\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n d\mu \ .$$

Sei $\beta > 1$. Es ist zu zeigen, dass $\int \varphi d\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \beta \int f_n d\mu$. Sei $B_n := \{x \in \Omega : \beta f_n(x) \geq \varphi(x)\}$. Dann ist $B_n \in \Sigma, B_n \subset B_{n+1}$ und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \Omega$. Es ist $\varphi 1_{B_n} \leq \beta f_n$. Somit gilt nach Lemma 5.4 für das durch $\lambda(A) = \int 1_A \cdot \varphi d\mu$ definierte Maß:

$$\begin{aligned}
\int \varphi d\mu = \lambda(\Omega) &= \lim_{n\to\infty} \lambda(B_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int \varphi 1_{B_n} d\mu \\
&\leq \beta \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \\
&= \beta \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n d\mu \ .
\end{aligned}$$

□

Beispiel 5.8. a) Sei $\Omega = \mathbb{R}, \Sigma = \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda$ das Lebesguemaß, $f_n := \frac{1}{n} 1_{[0,n]}$. Dann ist $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ aber $\int f_n d\lambda = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Hier ist die Monotonie verletzt.
Ebenso im Beispiel:
b) $f_n = 1_{[n,n+1]}$. Es ist $\int f_n d\lambda = 1$ aber

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \ .$$

Lemma 5.9. *Seien $f, g \in \mathcal{M}_+, \alpha \geq 0$.*
a) $\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$,
b) $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$.

Beweis. a) Nach Theorem 4.13 gibt es $\varphi_n \in \mathcal{E}_+$ derart dass $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$ für alle $x \in \Omega$, genauso $\psi_n \in \mathcal{E}_+$ derart dass $\psi_n \leq \psi_{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(x) = g(x)$ für alle $x \in \Omega$. Damit gilt nach Satz 5.2 (Additivität des Integrals auf $\mathcal{E}_+$) und dem Satz von Beppo Levi

$$\begin{aligned}
\int (f+g) d\mu &= \int \lim_{n\to\infty} (\varphi_n + \psi_n) d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\int \varphi_n + \psi_n d\mu \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n d\mu + \lim_{n\to\infty} \int \psi_n d\mu \\
&= \int f d\mu + \int g d\mu \ .
\end{aligned}$$

b) ist ähnlich. □

Satz 5.10. *Sei $f_n : \Omega \to [0, \infty]$ messbar, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist*

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu \ .$$

Man beachte, dass für $a_n \geq 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{m} a_n \in [0, \infty] \ .$$

Dabei ist $\sup\limits_{m\in\mathbb{N}} b_m := \infty$, falls die Folge $(b_m)_{m\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist.

Beweis. Sei $s_n := \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$. Dann ist $s_n \in \mathcal{M}_+$, $s_n \leq s_{n+1}$. Nach dem Satz von Beppo Levi ist

$$\begin{aligned}
\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu &= \int \sup_n s_n d\mu \\
&= \sup_n \int s_n d\mu \\
&= \sup_n \sum_{k=1}^{n} \int f_k d\mu \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int f_k d\mu \ .
\end{aligned}$$

□

Satz 5.11 (Lemma von Fatou)**.** *Sei* $f_n \in \mathcal{M}_+$. *Dann ist*

$$\int \varliminf_{n\to\infty} f_n d\mu \le \varliminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu \ .$$

Beweis. Sei $g_n(x) = \inf_{k\ge n} f_k(x)$. Somit ist $g_n \le g_{n+1}$ und $\sup g_n = \varliminf f_n$. Es ist

$$\begin{aligned} f_k &\ge g_n \text{ für alle } k \ge n, \text{ also} \\ \int f_k &\ge \int g_n d\mu \text{ für alle } k \ge n \ . \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\inf_{k\ge n} \int f_k d\mu \ge \int g_n d\mu \ .$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \varliminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\ge n} \int f_k d\mu \\ &\ge \sup_{n\in\mathbb{N}} \int g_n d\mu \\ &= \int \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n d\mu \\ &= \int \varliminf_{n\to\infty} f_n d\mu \ , \end{aligned}$$

wobei wir den Satz von Beppo Levi in der vorletzten Zeile benutzt haben. □

Satz 5.12. *Sei* $h \in \mathcal{M}_+$. *Dann definiert* $\lambda(A) := \int 1_A h d\mu \quad (A \in \Sigma)$ *ein Maß* λ *auf* Σ.

Bezeichnung. $\lambda =: h d\mu$.

Beweis. Da $1_\emptyset h = 0$ ist $\lambda(\emptyset) = 0$. Sei $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ mit $A_k \in \Sigma, A_k \cap A_\ell = \emptyset$ für $k \ne \ell$. Dann ist

$$1_A h = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{A_k} h \ .$$

Es folgt aus Satz 5.10 dass

$$\begin{aligned} \lambda(A) &= \int 1_A h d\mu \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int 1_{A_k} h d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k) \ . \end{aligned}$$

□

Satz 5.13. *Sei* $f \in \mathcal{M}_+$. *Es gilt* $\int f d\mu = 0$ *genau dann wenn* $f(x) = 0$ *f. ü.*

Beweis. a) Sei $\int f d\mu = 0$. Setze $A_n = \left\{f > \frac{1}{n}\right\}$. Dann ist $\frac{1}{n} 1_{A_n} \leq f$. Also ist $\frac{1}{n}\mu(A_n) \leq \int f d\mu = 0$. Folglich ist $\mu(A_n) = 0$. Damit ist auch $\{f > 0\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ eine Nullmenge.
b) Sei $f(x) = 0$ f. ü., also $\mu(A) = 0$ mit $A = \{x \in \Omega : f(x) > 0\}$. Sei $f_n = n 1_A$. Dann ist $f \leq \underline{\lim} f_n = \infty 1_A$. Also ist nach dem Lemma von Fatou

$$\int f d\mu \leq \underline{\lim} \int f_n d\mu = 0 \ .$$

$\square$

Korollar 5.14. Sei $h \in \mathcal{M}_+, \lambda = h d\mu$. Dann ist λ **absolut stetig** bzgl. μ; d. h. $\mu(A) = 0$ impliziert $\lambda(A) = 0$ für alle $A \in \Sigma$.

6 Integrierbare reell- und komplexwertige Funktionen

Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum. In diesem Abschnitt definieren wir nun, wann eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ integrierbar heißt und definieren ihr Integral. Wir führen gleich die Menge aller integrierbaren Funktionen $\mathcal{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ ein. Es ist ein Vektorraum und das Integral ist eine lineare Abbildung von $\mathcal{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ nach $\mathbb{R}$. Hier sind die genauen Definitionen. Mit

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(\Omega, \Sigma, \mu)$$

bezeichnen wir die Menge der messbaren Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und wie vorher mit $\mathcal{M}_+ : \{f : \Omega \to [0, \infty] : f \text{ messbar}\}$.

Definition 6.1. *a)* $\mathcal{L}^1 := \mathcal{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} \textit{ messbar: } \int f^+ d\mu < \infty, \int f^- d\mu < \infty\}$.
b) Für $f \in \mathcal{L}^1$ *setze*

$$\begin{aligned} \int f d\mu &:= \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \\ \textit{und } \int_A f d\mu &:= \int 1_A f d\mu \quad (A \in \Sigma) . \end{aligned}$$

c) Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *heißt* ***integrierbar****, falls* $f \in \mathcal{L}^1$.

Bemerkung. Sei $f \in \mathcal{L}^1, f = f_1 - f_2$ mit $f_j \in \mathcal{M}_+, \int f_j d\mu < \infty$. Dann gilt:

$$\int f d\mu = \int f_1 d\mu - \int f_2 d\mu .$$

Beweis. Es ist $f = f^+ - f^- = f_1 - f_2 \Rightarrow$. Folglich gilt $f^+ + f_2 = f^- + f_1$.
Lemma 5.9 impliziert nun

$$\int f^+ d\mu + \int f_2 d\mu = \int f^- d\mu + \int f_1 d\mu .$$

Damit gilt:

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu = \int f_1 d\mu - \int f_2 d\mu .$$

□

Bemerkung. Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar. Dann gilt

$$f \text{ integrierbar } \Leftrightarrow \int |f| d\mu < \infty \ .$$

Beweis. „$\Leftarrow$“: $f^+ \leq |f|$ und $f^- \leq |f|$.
„$\Rightarrow$“: $|f| = f^+ + f^-$.

Satz 6.2. *$\mathcal{L}^1$ ist ein Vektorraum und $f \in \mathcal{L}^1 \mapsto \int f d\mu$ ist linear.*

Beweis. a) Sei $f = g - h$ mit $g, h \geq 0$.

$$\begin{aligned} f, g, h \in \mathcal{L}^1 \quad &\Rightarrow \quad f^+ + h = g + f^- \Rightarrow \\ \int_\Omega (f^+ + h) d\mu \quad &= \quad \int (g + f^-) d\mu \\ &\overset{\text{Lemma 5.9}}{=} \int g d\mu + \int f^- d\mu \\ &= \int_\Omega f^+ d\mu + \int h d\mu \end{aligned}$$

Dann folgt $\int f d\mu = \int g d\mu - \int h d\mu$.
b) Seien $f, g \in \mathcal{L}^1$.
Wir zeigen $f + g \in \mathcal{L}^1$ und $\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$.
Es gilt $f + g = f^+ + g^+ - (f^- + g^-)$.
Zudem $(f + g)^+ \leq f^+ + g^+ \Rightarrow \int (f + g)^+ d\mu < \infty$.
Genauso $\int (f + g)^- d\mu < \infty \Rightarrow f + g \in \mathcal{L}^1$.

$$\begin{aligned} \int f + g d\mu &\overset{\text{a)}}{=} \int f^+ + g^+ d\mu - \int (f^- + g^-) d\mu \\ &= \int f d\mu + \int g d\mu \ . \end{aligned}$$

Sei $\alpha \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{L}^1$. Dann gilt

$$\int |\alpha f| d\mu = \int |\alpha||f| d\mu \overset{\text{Lemma 5.9}}{=} |\alpha| \int |f| < \infty \ .$$

Damit $(\alpha f) \in \mathcal{L}^1$. Falls $\alpha \geq 0$, dann ist

$$\begin{aligned} \int \alpha f d\mu &= \int (\alpha f)^+ d\mu - \int (\alpha f)^- d\mu \\ &= \int \alpha f^+ d\mu - \int \alpha f^- d\mu \\ &= \alpha (\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu) = \alpha \int f d\mu \ . \end{aligned}$$

Zudem gilt $\int (-f) d\mu = \int (-f)^+ d\mu - \int (-f)^- d\mu = \int f^- d\mu - \int f^+ d\mu$.
Also falls $\alpha < 0$, dann $\int \alpha f d\mu = -\int (-\alpha) f d\mu = -(-\alpha) \int f d\mu = \alpha \int f d\mu$. $\square$

Lemma 6.3 (Fundamentalabschätzung).

$$|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu \quad (f \in \mathcal{L}^1) \ .$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\int f d\mu &= \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \\ &\leq \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu = \int |f| d\mu \ .\end{aligned}$$

□

Bemerkung. Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar, $|f| \leq g, g \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow f \in \mathcal{L}^1$ (folgt aus Lemma 6.3).

Theorem 6.4 (Satz von Lebesgue oder Satz von der dominierten Konvergenz). *Seien $f, f_n \in \mathcal{L}^1$. Es gebe $g \in \mathcal{L}^1$ sodass für alle $n \in \mathbb{N}$*

$$|f_n| \leq g \ \mu \text{ - f.ü. } .$$

Sei $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ μ - f.ü.. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| d\mu = 0 \ .$$

Insbesondere ist

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu \ .$$

Also $\int \lim f_n = \lim \int f_n d\mu$ bei dominierten Folgen!

Beweis. a) $|f| \leq g, |f_n| \leq g \Rightarrow f, f_n$ integrierbar.
Wir können annehmen, dass

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), |f_n(x)| \leq g(x)$$

für alle $n \in \mathbb{N}, x \in \Omega$ (sonst ändern wir die Funktionen auf einer Nullmenge ab, wodurch die Integrale nicht beeinflußt werden (vgl. Satz 5.13).
Setze $h_n = |f_n - f|$.
Dann ist $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = 0$ für alle $(x \in \Omega)$ und $|h_n| \leq 2g$.
Das Lemma von Fatou zeigt, dass

$$\begin{aligned}\int_\Omega 2g d\mu &= \int \underline{\lim}(2g - h_n) d\mu \\ &\leq \underline{\lim} \int (2g - h_n) d\mu \\ &= \underline{\lim} \left[\int 2g d\mu - \int h_n d\mu \right] \\ &= \int_\Omega 2g d\mu - \overline{\lim} \int h_n d\mu\end{aligned}$$

da $\varliminf\limits_{n\to\infty}(-c_n) = -\varlimsup\limits_{n\to\infty} c_n$. Also ist $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\int h_n d\mu \le 0$. Da $\int h_n d\mu \ge 0$, folgt

$$\lim_{n\to\infty}\int h_n d\mu = 0 \ .$$

b)

$$\begin{aligned} |\int f_n d\mu \ &- \ \int f d\mu| = |\int (f_n - f) d\mu| \\ &\le \ \int |f_n - f| d\mu \to 0 \ . \end{aligned}$$

□

Sind die beiden Bedingungen im Satz von Lebesgue erfüllt, so spricht man von **dominierter Konvergenz**. Die Folge konvergiert punktweise und wird durch die Funktion g dominiert. Ohne diese Dominanz-Bedingung ist der Satz falsch wie die folgenden zwei Beispiele zeigen.

Beispiele 6.5. a) $f_n = \frac{1}{n}1_{[n,2n]}, \Omega = \mathbb{R}$. Dann $f_n \to 0$ gleichmäßig, $\int\limits_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = 1$.

b) $\Omega = (0,1]$, $f_n = n1_{(0,\frac{1}{n}]}$. Dann $f_n(x) \to 0$ f.ü. und

$$\int\limits_{[0,1]} f_n d\lambda = 1 \ .$$

Korollar 6.6. Sei $f_n \ge f_{n+1} \ge 0, f_n \in \mathcal{L}^1$.
Sei $f(x) = \inf\limits_n f_n(x)$.
Dann ist f integrierbar und $\lim\limits_{n\to\infty}\int f_n d\mu = \int f d\mu$.

Bemerkung. $\mathcal{L}^1(\Omega;\mathbb{C}) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} : \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in \mathcal{L}^1(\Omega)\}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{C}$. Für $f \in \mathcal{L}^1(\Omega;\mathbb{C})$ setzt man

$$\int f d\mu := \int \operatorname{Re} f d\mu + i \int \operatorname{Im} f d\mu \ .$$

Die Abbildung

$$f \mapsto \int f d\mu : \mathcal{L}^1(\Omega;\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$$

ist linear. Es gilt die Fundamentalabschätzung

$$(FA) \qquad |\int f d\mu| \le \int |f| d\mu \ .$$

Beweis. Sei $\varphi \in \mathbb{R}$ derart, dass $e^{i\varphi}\int f d\mu = |\int f d\mu|$. Dann ist

$$\begin{aligned} |\int f d\mu| \ &= \ e^{i\varphi}\int f d\mu = \int e^{i\varphi} f d\mu \\ \Rightarrow |\int f d\mu| \ &= \ \operatorname{Re}|\int f d\mu| = \int \operatorname{Re}(e^{i\varphi} f) d\mu \le \int |f| d\mu \ , \end{aligned}$$

da $\operatorname{Re}(e^{i\varphi} f) \le |e^{i\varphi} f| = |f|$.

Der Satz von Lebesgue gilt auch für komplexwertige Funktionen. Man wendet einfach den reellwertigen Satz auf Realteil und Imaginärteil an.

Satz 6.7 (Satz von Lebesgue: komplexer Fall)**.** *Seien* $f_n \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{C})$, *sodass*

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

für alle $x \in \Omega$ *existiert. Es gebe* $g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$, *sodass*

$$\mid f_n(x) \mid \leq g(x) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}, x \in \Omega \ .$$

Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{C})$ *und*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x) d\mu = \int f(x) d\mu \ .$$

7 Parameterabhängige Integrale

Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum. Die folgenden Sätze über parameterabhänginge Integrale sind von großer Bedeutung in der Analysis. Sie illustrieren sehr schön wie effizient der Satz von Lebesgue angewandt werden kann.

Satz 7.1 (Steigkeit bzgl. eines Parameters). *Sei J ein Intervall in $\mathbb{R}$ und sei $f : J \times \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion derart, dass*

a) $f(t, \cdot)\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *ist messbar für alle* $t \in J$*;*

b) $f(\cdot, x)\colon J \to \mathbb{R}$ *ist stetig* $\forall\, x \in \Omega$*;*

c) es gibt $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *derart, dass* $\mid f(t,x) \mid \leq g(x)$ *für alle* $x \in \Omega, t \in J$*.*

Setze $F(t) = \int\limits_\Omega f(t,x)d\mu(x)$*. Dann ist* $F : J \to \mathbb{R}$ *stetig.*

Beweis. Sei $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t_0$ in J. Nach Voraussetzung gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(t_n, x) = f(t_0, x)$ für alle $x \in \Omega$. Da $\mid f(t_n, x) \mid \leq g(x)$ für alle $x \in \Omega, n \in \mathbb{N}$, folgt die Behauptung aus dem Satz von Lebesgue. □

Als nächstes geben wir Bedingungen an, die es erlauben „unter dem Integral zu differenzieren“.

Satz 7.2 (Differenzierbarkeit). *Sei J ein Intervall, $f\colon J \times \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Es gelte:*

(a) $f(t, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ *für alle* $t \in J$*;*

(b) $f(\cdot, x)\colon J \to \mathbb{R}$ *ist differenzierbar für alle* $x \in \Omega$*;*

(c) es gibt $g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ *derart dass*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq g(x) \text{ für alle } x \in \Omega, t \in J\ .$$

Dann ist $f(t, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ *für alle* $t \in J$ *und*

$$F(t) := \int\limits_\Omega f(t,x)d\mu(x) \quad (t \in J)$$

definiert eine differenzierbare Funktion $F : J \to \mathbb{R}$*. Ferner ist*

$$F'(t) = \int\limits_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)d\mu(x) \text{ für alle } t \in J\ .$$

Beachte, dass $\frac{\partial f}{\partial t}(t,\cdot) \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ für jedes $t \in J$. Sei nämlich $t \in J$. Wähle $t_n \in J, t_n \neq t$ mit $t_n \to t$. Dann ist

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n - t}(f(t_n,x) - f(t,x)) \ .$$

Somit ist $\frac{\partial f}{\partial t}(t,\cdot)$ nach Korollar 4.9 messbar. Da

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq g(x) \text{ für alle } x \in \Omega, \text{ ist } \frac{\partial f}{\partial t}(t,\cdot) \in \mathcal{L}^1(\Omega) \ .$$

Beweis von Satz 7.2. Sei $t \in J$, und sei $t_n \in J \setminus \{t\}$, sodass $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t$. Sei $n \in \mathbb{N}$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es zu jedem $x \in \Omega$ ein $s_x \in J$, sodass

$$\frac{f(t_n,x) - f(t,x)}{t_n - t} = \frac{\partial f}{\partial t}(s_x,x) \ .$$

Wegen (c) ist also

$$\left|\frac{f(t_n,x) - f(t,x)}{t_n - t}\right| \leq g(x) \ .$$

Nun folgt aus dem Satz von Lebesgue, dass

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} &= \\ \lim_{n\to\infty} \int \frac{f(t_n,x) - f(t,x)}{t_n - t} d\mu(x) &= \int \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) d\mu(x) \ . \end{aligned}$$

□

Beispiel. Sei $f \in \mathcal{L}^1(a,b)$ derart, dass $\int\limits_{(a,b)} |x||f(x)| \,\mathrm{dx} < \infty$; $F(\lambda) := \int\limits_{(a,b)} e^{-\lambda x} f(x) dx$. Dann ist $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierter mit

$$F'(\lambda) = -\int\limits_{(a,b)} e^{-\lambda x} x f(x) dx \ .$$

Satz 7.2 bleibt richtig, wenn wir „reell-differenzierbar“ durch „holomorph“ ersetzen. Da er für diesen Fall wichtig ist, fügen wir ihn an. Leser ohne Grundlagen in Funktionentheorie mögen ihn einfach überspringen.

Satz 7.3. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen, $f : G \times \Omega \to \mathbb{C}$ eine Funktion derart, dass*

(a) $f(z,\cdot) \in \mathcal{L}^1(\Omega,\mathbb{C}) \quad \forall\ z \in G$;

(b) $f(\cdot,x)$ *ist holomorph auf* G *für alle* $x \in \Omega$;

(c) $\mid f'(z,x) \mid \leq g(x)$ *für alle* $x \in \Omega, z \in G$ *wobei* $g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$.

Sei $F(z) := \int\limits_{\Omega} f(z,x)d\mu(x)$*. Dann ist* $F : G \to \mathbb{C}$ *holomorph und* $F'(z) = \int\limits_{\Omega} f'(z,x)d\mu(x)$*.*
Hier ist $f'(z,x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(z+h,x)-f(z,x)}{h}$ *die komplexe Anleitung in* z*.*

Beweis. Sei $z \in G, z_n \to z, z_n \neq z$. Dann gilt $f(z_n,x) - f(z,x) =$

$$\int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial t} f(z + t(z_n - z), x)\,\mathrm{dt} \qquad =$$

$$\int\limits_0^1 f'(z + t(z_n - z), x)(z_n - z)\,\mathrm{dt} \quad \text{für alle} \quad x \in \Omega\ .$$

Daher ist

$$\left| \frac{f(z_n,x) - f(z,x)}{z_n - z} \right| \leq g(x)$$

für alle $x \in \Omega$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt aus dem Satz von Lebesgue, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(z_n) - f(z)}{z_n - z} \quad =$$

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} \frac{f(z_n,x) - f(z,x)}{z_n - z} d\mu(x) \quad =$$

$$\int\limits_{\Omega} f'(z,x)d\mu(x)\ .$$

□

8 Das Riemannintegral

Ziel dieses Abschnittes ist es, das Riemann- mit dem Lebesgueintegral zu vergleichen. Zunächst einmal wiederholen wir die Definition und Eigenschaften des Riemannintegrals.

Gegeben ist ein kompaktes Intervall $[a, b]$. Ist $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so wurde in Analysis I das Riemannintegral $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$ definiert. Auf der anderen Seite kennen wir das Lebesguemaß λ auf $\mathcal{B}([a, b])$, der Menge der Borelschen Teilmengen von $[a, b]$. Da f stetig ist, ist f beschränkt und messbar. Damit ist f Lebesgue-integrierbar, also $f \in \mathcal{L}^1([a, b])$.

Satz 8.1. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \int f d\lambda.$

Wir werden diesen Satz beweisen, aber auch etwas weitergehen, den grundlegenden Unterschied zwischen Riemann- und Lebesgueintegral herausheben und weitere interessante Informationen geben.

Definition 8.2. *Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei π eine **Partition** $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ von $[a, b]$ mit **Zwischenstellen** $s_i \in [t_{i-1}, t_i], i = 1, \ldots, n$. Wir sagen abküzend: π ist eine **PmZ**, und beachten, dass zu π auch die Zwischenstellen gehören. Mit*

$$\mid \pi \mid := \max_{i=1,\cdots,n} (t_i - t_{i-1})$$

*bezeichnen wir die **Norm** von π. Dann nennt man*

$$S(f, \pi) := \sum_{i=1}^{n} f(s_i)(t_i - t_{i-1})$$

*die **Riemannsumme** von f bzgl. π. Die Funktion f heißt **Riemann-integrierbar**, falls es $S \in \mathbb{R}$ gibt, sodass*

$$\lim_{|\pi| \to 0} S(f, \pi) = S$$

(das wiederum heißt: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ derart, dass $\mid S(f, \pi) - S \mid \leq \varepsilon$ für jede PmZ mit $\mid \pi \mid \leq \delta$). Dieses $S \in \mathbb{R}$ ist dann eindeutig und man setzt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} := S\ .$$

Wir wissen aus der Analysis 1, dass jede stetige und jede monotone Funktion

$$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$$

Riemann-integrierbar ist.

Folgender Satz beschreibt die Riemann-Integrierbarkeit auf ganz andere Art und Weise. Wir verweisen auf H. Heuser: Analysis 2.

Satz 8.3 (Charakterisierung)**.** *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:*

(i) f ist Riemann-integrierbar;

(ii) a) f ist beschränkt und
b) die Menge

$$\{t \in [a,b] : f \text{ ist unstetig in } t\}$$

ist eine Lebesgue-Nullmenge.

Mit Lebesgue-Nullmenge meinen wir natürlich eine Nullmenge bzgl. des Lebesgue-Maßes λ, das wir durchweg in diesem Abschnitt betrachten. Unsere Definition der Riemann-integrierbaren Funktionen hat den Vorteil, dass man mit beliebigen Zwischenstellen arbeiten kann. Außerden macht sie auch für Funktionen Sinn, die Werte in $\mathbb{R}^d$ annehmen, wenn man

$$\mid y \mid := \left(\sum_{j=1}^{d} y_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \ y \in \mathbb{R}^d ,$$

als die euklidische Norm interpretiert. Auch jede stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^d$ ist Riemann-integrierbar. Die folgende Beschreibung gilt nur für reellwertige Funktionen, da die Ordnungsstruktur ins Spiel kommt. Sie ist auch im Schulunterricht populär, da sie sehr anschaulich ist.

Satz 8.4 (Analysis 2)**.** *Sei $: [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Zu einer Zerlegung*

$$\varrho\colon t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b$$

definiere die ***Obersumme***

$$\bar{S}(f,\varrho) := \sum_{j=1}^{n} \bar{m}_j (t_j - t_{j-1})$$

mit $\bar{m}_j := \sup\limits_{s \in [t_{j-1}, t_j]} f(s)$ und die ***Untersumme***

$$\underline{S}(f,\varrho) := \sum_{j=1}^{n} \underline{m}_j (t_j - t_{j-1})$$

mit $\underline{m}_j := \inf\limits_{s \in [t_{j-1}, t_j]} f(s)$. Dann sind äquivalent:

(i) f ist Riemann-integrierbar;

(ii) zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zerlegung ϱ derart, dass

$$\bar{S}(f,\varrho) - \underline{S}(f,\varrho) \leq \varepsilon\ .$$

In dem Fall ist

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \sup_{\varrho} \underline{S}(f,\varrho) = \inf_{\varrho} \bar{S}(f,\varrho)$$

wobei das Supremum und das Infimum über alle Zerlegungen ϱ von $[a,b]$ gebildet wird.

Nun sieht man auch klar den Unterschied zwischen Riemann- und Lebesgue-Integral. Beim Riemann-Integral approximiert man mit **Treppenfunktionen** d.h. Funktionen der Form

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j 1_{I_j}$$

wobei $I_j = [t_{j-1}, t_j]$ ein Intervall ist. Beim Lebesgue-Integral approximiert man durch messbare, einfache Funktionen, also Funktionen der Form

$$\psi = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j 1_{A_j}$$

wobei A_j eine beliebige Borel-messbare Menge ist.

Beispiel. Die Funktion $f = 1_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ ist nicht Riemann-integrierbar da $\underline{S}(f,\varrho) = 0$ und $\bar{S}(f,\varrho) = 1$ für jede Zerlegung ϱ von $[0,1]$ gilt. Aber da

$$f = 0 \text{ f.ü. ist } f \in \mathcal{L}^1([0,1], \mathcal{B}[0,1], \lambda)$$

und $\int f d\lambda = 0$. □

Damit haben wir ein Beispiel einer Funktion f gefunden, die Lebesgue- aber nicht Riemann-integrierbar ist. Es ist aber noch nicht sehr überzeugend, da $f = 0$ f.ü. gilt. Das Beispiel 8.6 weiter unten ist interessanter. Wir wollen aber erst zeigen, dass jede Riemann-integrierbare Funktion Lebesgue-integrierbar ist, zumindest nach Abänderung auf einer Nullmenge.

Satz 8.5. *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann gibt es eine Lebesgue-integrierbare Funktion $\tilde{f}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, sodass $\tilde{f}(x) = f(x)$ f.ü. und*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \int_{[a,b]} \tilde{f} d\lambda\ .$$

Hier ist λ das Lebesguemaß auf den Borelmengen von $[a,b]$ und $\tilde{f} = f$ f.ü. bedeutet, dass die Menge $N := \{x \in [a,b] : \tilde{f}(x) \neq f(x)\}$ eine Lebesgue-Nullmenge ist (d.h. es gibt eine Borelmenge $A \subset [a,b]$, sodass $N \subset A$ und $\lambda(A) = 0$).

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\triangle_n = \frac{b-a}{2^n}$,

$$\begin{aligned} I_{n,k} &= [a + k\triangle_n, a + (k+1)\triangle_n], k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1, \\ \bar{\alpha}_{n,k} &:= \sup\{f(x) : x \in I_{n,k}\}, \\ \underline{\alpha}_{n,k} &:= \inf\{f(x) : x \in I_{n,k}\} \ . \end{aligned}$$

Definiere $g_n, h_n \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} g_n &:= \sum_{k=0}^{2^n-1} \underline{\alpha}_{n,k} 1_{I_{n,k}} \ , \\ h_n &:= \sum_{k=0}^{2^n-1} \bar{\alpha}_{n,k} 1_{I_{n,k}} \ . \end{aligned}$$

Dann gilt

$$g_n \leq g_{n+1} \leq f \leq h_{n+1} \leq h_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Ferner ist

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} g_n d\lambda &= \sum_{k=0}^{2^n-1} \underline{\alpha}_{n,k} \lambda(I_{n,k}) = \underline{S}(f, \varrho_n) \\ \int_{[a,b]} h_n d\lambda &= \sum_{k=0}^{2^n-1} \bar{\alpha}_{n,k} \lambda(I_{n,k}) = \bar{S}(f, \varrho_n) \end{aligned}$$

wobei ϱ_n die Zerlegung $a = t_0, t_1 = t_0 + \triangle_n, \ldots, t_{2^n-1} = b - \triangle_n, t_{2^n} = b$ ist. Nach Definition 8.2 ist

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \underline{S}(f, \varrho_n) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \overline{S}(f, \varrho_n) \ .$$

Sei

$$g(x) = \sup_n g_n(x), \ \ h(x) = \inf_n h_n(x) \ .$$

Dann sind $g, h \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Borel-messbar und beschränkt, also Lebesgue-integrierbar.

Aus dem Satz von Beppo Levi folgt, dass

$$\begin{aligned}
\int\limits_{[a,b]} g d\lambda &= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[a,b]} g_n d\lambda \\
&= \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, \varrho_n) \\
&= \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{dx} \\
&= \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, \varrho_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[a,b]} h_n d\lambda \\
&= \int\limits_{[a,b]} h d\lambda \ .
\end{aligned}$$

Damit ist $\int\limits_{[a,b]} (h-g)d\lambda = 0$. Da $h - g \geq 0$, folgt aus Satz 5.13, dass $h - g = 0$ f.ü. Folglich gilt $g = f = h$ f.ü. und wir können $\tilde{f} = g$ oder $\tilde{f} = h$ wählen. □

Bemerkung. Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so ist f i.a. nicht Borel-messbar (siehe Elstrott IV § 6, 6.2c, Seite 151). Die Abänderung von f auf einer Nullmenge im Satz 8.4 war also notwendig.

Das folgende Beispiel zeigt, dass die Umkehrung von Satz 8.4 nicht gilt. Das Lebesgue-Integral ist also selbst dann echt allgemeiner als das Riemann-Integral, wenn wir Abänderungen auf Nullmengen zulassen.

Beispiele 8.6. Sei $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ und sei $\varepsilon > 0$. Setze

$$J_n := (q_n - 2^{-(n+1)}\varepsilon, q_n + 2^{-(n+1)}\varepsilon) \text{ und } U := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n \ .$$

Dann ist U offen (und sogar dicht in $\mathbb{R}$!), aber

$$\lambda(U) \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-(n+1)} 2\varepsilon = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \varepsilon \ .$$

Sei $K := [0,1] \setminus U$. Dann ist K kompakt. Damit ist

$$1_K \in \mathcal{L}^1([0,1], \mathcal{B}([0,1], \lambda) \ .$$

Wir zeigen: *Es gibt keine Riemann-integrierbare Funktion f, sodass $f(x) = 1_K(x)$ f.ü.*.

Beweis. Sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Funktion derart, dass $f = 1_K$ f.ü.. Dann gibt es eine Borelmenge N, sodass $\lambda(N) = 0$ und $f(x) = 1_K(x)$ für alle $x \in [0,1] \setminus N$. Wir zeigen, dass f nicht Riemann-integrierbar ist. Ist

$$x_0 \in D := [0,1] \setminus (U \cup N) \text{ , so ist } f \text{ unstetig in } x_0 \text{ .}$$

Es ist nämlich $f(x_0) = 1_K(x_0) = 1$. Aber es gibt eine Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ von rationalen Zahlen derart, dass $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = x_0$. Damit ist $x_m \in J_{n_m}$ für ein $n_m \in \mathbb{N}$. Da N eine Nullmenge ist, enthält sie kein offenes Intervall. Somit gibt es $y_m \in J_{n_m} \setminus N$, sodass $\mid y_m - x_m \mid\leq \frac{1}{m}$. Damit ist $\lim\limits_{m\to\infty} y_m = x_0$, aber $f(x_m) = 1_K(x_m) = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$ obwohl $f(x_0) = 1$. Die Menge U_f der Unstetigkeitsstellen von f umfasst also die Menge D. Da

$$\begin{aligned} \lambda(D) &= 1 - \lambda((U \cap [0,1]) \cup N) \\ &= 1 - \lambda(U \cap [0,1]) \geq 1 - \varepsilon > 0 \text{ ,} \end{aligned}$$

kann f nach Satz 8.3 nicht Riemann-integrierbar sein.

Jetzt kommen wir auf Satz 8.5 zurück. Er besagt, dass Riemann-integrierbare Funktionen in $\mathcal{L}^1$ sind, wenn wir sie auf einer Nullmenge abändern. Solch eine Abänderung ist für stetige und monotone Funktionen nicht nötig. □

Satz 8.7. *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und Borel-messbar. Dann ist f auch Lebesgue-integrierbar und beide Integrale stimmen überein.*

Bemerkung. Die Voraussetzung ist insbesondere für stetige und monotone Funktionen erfüllt.

Beweis. Nach Satz 8.4 gibt es $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1([a,b], \mathcal{B}([a,b], \lambda)$, sodass

$$\tilde{f} = f \text{ f.ü. und } \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \int_{[a,b]} \tilde{f} d\lambda \text{ .}$$

Da aber f messbar und beschränkt ist, ist f selbst in $\mathcal{L}^1$. Da $f = \tilde{f}$ f.ü., folgt aus Satz 5.13, dass

$$\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_{[a,b]} \tilde{f} d\lambda = \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} \text{ .}$$

□

Bezeichnung: Mit $\mathcal{L}^1(a,b)$ bezeichnen wir die Borel-messbare Funktionen, die bzgl. des Lebesguemasses integrierbar sind. Für $f \in \mathcal{L}^1(a,b)$ setzen wir

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} := \int_{[a,b]} f d\lambda \ .$$

Wir wissen nun aus Satz 8.7, dass diese Notation konsistent ist, falls f auch Riemann-integrierbar ist.

Als nächstes betrachten wir das uneigentliche Riemannintegral.

Definition 8.8. *Sei $-\infty < a < b \leq \infty$. Eine stetige Funktion $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ heißt* ***uneigentlich Riemann-integrierbar****, falls es $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^{b_n} f(t)\,\mathrm{dt} = c$$

für jede Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}, b_n \uparrow b$.

Äquivalent: $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ a < b_0 < b$, sodass $\mid \int_a^{b_1} f(t)\,\mathrm{dt} - c \mid \leq \varepsilon$ für alle $b_1 \in [b_0, b)$.

Bezeichnung: $R - \int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} := c$.

Satz 8.9. *Sei $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ stetig.*

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) f ist integrierbar (bzgl. λ!);

(ii) $\mid f \mid$ ist uneigentlich Riemann-integrierbar.

In dem Fall ist auch f uneigentlich Riemann-integrierbar und

$$\int_{[a,b]} f d\lambda = R - \int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} \ .$$

Beweis. *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)* f integrierbar $\Rightarrow \mid f \mid$ integrierbar. Sei $b_n < b, \lim b_n = b \Rightarrow$

$$\int_a^{b_n} f(t)\,\mathrm{dt} = \int_{[a,b_n]} f d\lambda \to \int_{[a,b)} f d\lambda \text{ (Satz von Lebesgue).}$$

Also auch $\int_a^{b_n} \mid f(t) \mid \mathrm{dt} \to \int_{[a,b)} \mid f \mid d\lambda \quad (n \to \infty)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ f ist messbar.

Der Satz von Beppo Levi zeigt, dass

$$\begin{aligned}\int\limits_{[a,b)} |\, f \,|\, d\lambda &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{[a,b_n]} |\, f \,|\, d\lambda \\ &= \sup_{n} \int\limits_{a}^{b_n} |\, f(t) \,|\, \mathrm{dt} \ .\end{aligned}$$

□

Beispiel 8.10. Sei $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{für} \quad x > 0 \\ 1 & \text{für} \quad x = 0 \ . \end{cases}$$

Dann ist f stetig, uneigentlich integrierbar aber nicht L-integrierbar!

d.h.

$$\int\limits_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{dx} = \infty \ !$$

Cauchy-Kriterium 8.11. Sei $F\colon [a,b) \to \mathbb{R}$.

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\exists\ c \in \mathbb{R}, \lim\limits_{t\to b} F(t) = c$

(ii) $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ b_0 \in [a,b)$, sodass für $b_1, b_2 > b_0$ gilt $|\ F(b_1) - F(b_2)\ | \leq \varepsilon$.

Beweis von Beispiel 8.10. a) Sei $\varepsilon > 0, 0 < b_0 < b_1, b_2 < \infty$.
OBdA $b_1 < b_2$

$$\left|\int\limits_0^{b_2} \tfrac{\sin x}{x}\,\mathrm{dx} - \int\limits_0^{b_1} \tfrac{\sin x}{x}\,\mathrm{dx}\right| =$$

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} \tfrac{\sin x}{x}\,\mathrm{dx}\right| =$$

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} -\cos' x \cdot \tfrac{1}{x}\,\mathrm{dx}\right| =$$

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} \cos x (-\tfrac{1}{x^2})\,\mathrm{dx} - \tfrac{\cos b_2}{b_2} + \tfrac{\cos b_1}{b_1}\right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{b_0}^{\infty} \tfrac{1}{x^2}\,\mathrm{dx} + \tfrac{1}{b_2} + \tfrac{1}{b_1}$$

$$= \tfrac{1}{b_0} + \tfrac{1}{b_2} + \tfrac{1}{b_1} \leq \tfrac{3}{b_0} \ .$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $b_0 > 0$ derart, dass $\frac{3}{b_0} < \varepsilon$.

b)

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{dx} = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{|x|} dx \\
&\geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi} \int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x| \, \mathrm{dx} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cdot c \\
&\to \infty \quad (n \to \infty) \ .
\end{aligned}$$

Hier ist $c = \frac{1}{\pi} \int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x| \, \mathrm{dx}$ unabhängig von k. □

9 Die L^p-Räume

In diesem Abschnitt lernen wir die L^p-Räume kennen, die für jedes $p \in [1, \infty)$ definiert sind. Es handelt sich um Banachräume, die eine große Rolle in der Analysis spielen. Wir wollen simultan komplexe und reelle Vektorräume behandeln. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Definition 9.1. *Sei E ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $f \in E \mapsto \| f \| \in \mathbb{R}_+$ heißt* ***Halbnorm****, falls*

(a) $\| \lambda f \| = | \lambda | \, \| f \|$ *und*

(b) $\| f + g \| \leq \| f \| + \| g \|$ *(Dreiecksungleichung)*

für alle $f, g \in E, \lambda \in \mathbb{K}$ gilt. Sie heißt ***Norm****, falls zusätzlich*

$$\| f \| = 0 \Rightarrow f = 0 \ .$$

Sei nun (Ω, Σ, μ) ein Maßraum. Wir nennen $f : \Omega \to \mathbb{C}$ messbar, wenn $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar sind. Damit ist auch $| f | = ((\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f)^2)^{1/2}$ messbar. Für $1 \leq p < \infty$ setzen wir

$$\mathcal{L}^p(\Omega) := \{ f \colon \Omega \to \mathbb{K} \text{ messbar} : \int_\Omega | f |^p \, d\mu < \infty \} \ .$$

Satz 9.2. *Sind $f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega), \lambda \in \mathbb{K}$, so sind auch $f + g, \lambda f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$; d.h. $\mathcal{L}^p(\Omega)$ ist ein Vektorraum. Ferner definiert*

$$\| f \|_p := \left(\int_\Omega | f |^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^p(\Omega)$. Es gilt

$$\| f \|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0 \textit{ f.ü.} \ .$$

Klar ist, dass $\| \lambda f \|_p = | \lambda | \, \| f \|_p$ und aus Satz 5.13 folgt, dass

$$\| f \|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ f.ü.} \ .$$

Ist $p = 1$, so ist wegen $| f(x) + g(x) | \leq | f(x) | + |g(x)|$

$$\| f + g \|_1 \leq \| f \|_1 + \| g \|_1$$

für alle $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$. Aber für $1 < p < \infty$ ist die Dreiecksungleichung nicht offensichtlich. Wir brauchen folgendes Lemma.

Lemma 9.3. *Sei $1 < p < \infty$, und sei p', sodass*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \ .$$

*p' heißt der zu p **konjungierte Index**. Seien $0 \leq a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} \ b^{p'} \ .$$

Beweis. Der Logarithmus $\log\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist konkav, d.h.

$$\log(tx + (1-t)y) \geq t \log x + (1-t) \log y$$

für $0 < t < 1, x, y \in (0,\infty)$. Das folgt aus einem Satz der Analysis 1, da

$$\log''(t) = \left(\frac{1}{t}\right)' = -\frac{1}{t^2} < 0 \text{ für alle } t > 0 \ .$$

Exponenzieren der Ungleichung liefert

$$tx + (1-t)y \geq x^t y^{1-t}$$

für $t > 0$. Setze $t = \frac{1}{p}$. Dann ist $1 - t = \frac{1}{p'}$. Setze $x = a^p, y = b^{p'}$. Dann ist

$$ab = x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{p'}} \leq \frac{1}{p} x + \frac{1}{p'} y = \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'} \ .$$

Aus dem Lemma erhalten wir eine wichtige Ungleichung. □

Satz 9.4 (Hölderungleichung)**.** *Sei $1 < p < \infty$ und seien $f \in \mathcal{L}^p, g \in \mathcal{L}^{p'}$. Dann ist $f \cdot g \in \mathcal{L}^1$ und*

$$\| f \cdot g \|_1 \leq \| f \|_p \cdot \| g \|_{p'} \ .$$

Beweis. 1. Fall: $\| f \|_p = \| g \|_{p'} = 1$. Nach Lemma 9.3 ist

$$| f(x) | \cdot | g(x) | \leq \frac{1}{p} \, | f(x) |^p + \frac{1}{p'} \, | g(x) |^{p'} \ .$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \int_\Omega | f \cdot g | \, d\mu \ &\leq \ \frac{1}{p} \int | f(x) |^p \, d\mu + \frac{1}{p'} \int | g(x) |^{p'} \, d\mu \\ &= \ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 = \| f \|_p \cdot \| g \|_{p'} \ . \end{aligned}$$

2. Fall: $\| f \|_p \neq 0, \| g \|_{p'} \neq 0$. Setze $\tilde{f} := \frac{1}{\|f\|_p} f, \tilde{g} := \frac{1}{\|g\|_{p'}} g$. Dann ist $\| \tilde{f} \|_p = \| \tilde{g} \|_{p'} = 1$. Aus Fall 1 folgt also

$$\frac{1}{\| f \|_p} \cdot \frac{1}{\| g \|_{p'}} \int_\Omega | fg | \, d\mu = \int_\Omega | \tilde{f}\tilde{g} | \, d\mu \leq 1 \ .$$

Daraus folgt die Behauptung.
3. Fall: Die Ungleichung ist trivial, wenn $\| f \|_p = 0$ oder $\| g \|_{p'} = 0$. Dann gilt nämlich $f = 0$ f.ü. oder $g = 0$ f.ü., also $f \cdot g = 0$ f.ü. und somit $\| f \cdot g \|_1 = 0$. □

Nun können wir die Dreiecksungleichung für $1 < p < \infty$ beweisen. Sie trägt einen Namen.

Satz 9.5 (Minkowski-Ungleichung)**.** *Sei $1 \leq p < \infty$. Dann gilt*

$$\| f + g \|_p \leq \| f \|_p + \| g \|_p$$

für alle $f, g \in \mathcal{L}^p$.

Beweis. Der Fall $p = 1$ wurde schon vorher geklärt. Wir nehmen an, dass $1 < p < \infty$. Dann erhalten wir mit Hilfe der Hölderungleichung

$$\begin{aligned}
\| f + g \|_p^p &= \int_\Omega | f + g |^p \, d\mu \\
&= \int_\Omega | f + g |^{p-1} | f + g | \, d\mu \\
&\leq \int_\Omega | f + g |^{p-1} \cdot | f | \, d\mu + \int_\Omega | f + g |^{p-1} | g | \, d\mu \\
&\leq \left(\int_\Omega | f + g |^{(p-1)p'} \, d\mu \right)^{\frac{1}{p'}} \| f \|_p + \left(\int_\Omega | f + g |^{(p-1)p'} \, d\mu \right)^{\frac{1}{p'}} \cdot \| g \|_p \\
&= \left(\int_\Omega | f + g |^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p'}} (\| f \|_p + \| g \|_p) \\
&= \| f + g \|_p^{\frac{p}{p'}} (\| f \|_p + \| g \|_p) \\
&= \| f + g \|_p^{p-1} (\| f \|_p + \| g \|_p) \; .
\end{aligned}$$

Multiplikation mit $\| f + g \|_p^{1-p}$ auf beiden Seiten (o.B.d.A. $\|f + g\|_p \neq 0$) liefert die Ungleichung. Wir haben benutzt, dass $(p - 1)p' = p$ und $\frac{p}{p'} = p - 1$. □

Das Integral ändert sich nicht, wenn wir eine Funktion auf einer messbaren Nullmenge abändern. Daher wollen wir im Folgenden f und f_1 identifizieren, wenn $f = f_1$ fast überall gilt. Das ist verträglich mit der Vektorraumstruktur, d.h.

$$f = f_1 \text{ f.ü.}, \; g = g_1 \text{ f.ü.} \; \Rightarrow f + g = f_1 + g_1 \text{ f.ü. und } \lambda f = \lambda f_1 \text{ f.ü.}.$$

Ferner gilt $\| f \|_p = \| f_1 \|_p$. Wir bezeichnen mit $L^p(\Omega) = L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ den Raum $\mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ mit der Vereinbarung

$$f = g \text{ in } L^p(\Omega) :\Leftrightarrow f = g \text{ f.ü.} \; .$$

Damit ist $L^p(\Omega)$ ein Vektorraum. Ferner gilt

$$\| f \|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ in } L^p(\Omega) \ .$$

Somit ist $\| \cdot \|_p$ eine Norm auf $L^p(\Omega)$.

Bemerkung. (Quotientenraum). Identifizieren ist ureigens mathematisch. Man macht es über Äquivalenzrelationen. Hier sind die genauen Begriffe.
a) Sei E ein Vektorraum, F ein Unterraum. Dann definiert

$$x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in F$$

eine Äquivalenzrelation auf E, d.h. es gilt

(a) $x \sim x$;

(b) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$;

(c) $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$ für alle $x, y, z, \in E$.

Ist $x \in E$, so bezeichnet

$$\begin{aligned} [x] &:= \{y \in E \colon x - y \in F\} \\ &= \{x + z \colon z \in F\} \\ &=: x + F \end{aligned}$$

die zugehörige Äquivalenzklasse. Der Raum

$$E/F := \{[x] \colon x \in E\}$$

wird ein Vektorraum bzgl.

$$\begin{aligned} [x] + [y] &:= [x + y] \ , \\ \lambda[x] &:= [\lambda x] \end{aligned}$$

(man weise nach, dass das wohldefiniert ist!). Die Quotientenabbildung

$$q \colon E \to E/F, \qquad q(x) = [x]$$

ist linear und surjektiv.
b) Sei E ein Vektorraum und $\| \cdot \|$ eine Halbnorm auf E. Dann ist $F := \{x \in E \colon \| x \| = 0\}$ ein Unterraum. Ferner definiert

$$\| [x] \| := \| x \|$$

eine Norm auf E/F.
c) Hier setzen wir $E = \mathcal{L}^p(\Omega)$. Dann ist

$$\begin{aligned} F := \{u \in \mathcal{L}^p(\Omega) \colon \| u \|_p = 0\} &= \{u \in \mathcal{L}^p(\Omega) \colon u = 0 \text{ f.ü.}\} \\ &= \{u \colon \Omega \to \mathbb{K} \text{ messbar} : u = 0 \text{ f.ü.}\}. \end{aligned}$$

Für $u \in E$ ist $[u] = \{v \in \mathcal{L}^p(\Omega) \colon u = v \text{ f.ü.}\}$. Man definiert

$$L^p(\Omega) := \mathcal{L}^p(\Omega)/F\ .$$

Allerdings ist es etwas schwerfällig, immer die Äquivalenzklassen hinzuschreiben. Deswegen nennt man die Elemente von $L^p(\Omega)$ immer noch f, aber sagt:

$$f = g \quad (\text{ in } L^p(\Omega)) :\Leftrightarrow f = g \text{ f.ü.}.$$

Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Für $u_n, u \in E$ definieren wir

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} u_n = u \quad &:\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \| u_n - u \| = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0 \forall\ n \geq n_0\ \| u_n - u \| \leq \varepsilon\ . \end{aligned}$$

Eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E heißt Cauchyfolge, falls es für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $\| u_n - u_m \| \leq \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0$. Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge. Der Raum E heißt **vollständig**, falls es zu jeder Cauchyfolge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E ein $u \in E$ gibt derart, dass $\lim_{n\to\infty} u_n = u$. Ein **Banachraum** ist ein vollstständiger, normierter Raum. Hier interessiert uns der Raum $E = L^p(\Omega)$ mit der Norm $\| \cdot \|_p$.

Satz 9.6 (Riesz-Fischer)**.** *Sei $p \in [1, \infty), (\Omega, \Sigma, \mu)$ ein Maßraum. Dann ist $L^p(\Omega)$ ein* ***Banachraum****.*

Um den Satz 9.6 zu beweisen benutzen wir das folgende Lemma.

Lemma 9.7. *Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Eine Cauchyfolge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E konvergiert, falls sie eine konvergierte Teilfolge hat.*

Beweis. Sei $\lim_{k\to\infty} u_{n_k} = u$ wobei $n_k < n_{k+1}$ $(k \in \mathbb{N})$ (nach Definition von Teilfolgen). Sei $\varepsilon > 0$. Dann

$$\begin{aligned} \exists\ n_0 \in \mathbb{N} \quad &: \quad \| u_n - u_m \| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall\ n, m \geq n_0 \\ \exists\ k_0 \in \mathbb{N} \quad &: \quad \| u_{n_k} - u \| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall\ k \geq k_0\ . \end{aligned}$$

Wähle $k \geq \max\{k_0, n_0\}$. Dann ist $n_k \geq n_{n_0} \geq n_0$. Also ist für $n \geq n_0$

$$\| u_n - u \| \leq \| u_n - u_{n_k} \| + \| u_{n_k} - u \| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

also $u_n \to u$. □

Wir benötigen zusätzlich folgendes Lemma.

Lemma 9.8. *Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $g \colon \Omega \to [0, \infty]$ messbar mit $\int_\Omega g d\mu < \infty$. Dann ist $g(x) < \infty$ fast überall.*

Beweis. Setze $A_n: = \{x \in \Omega \colon g(x) \geq n\}$. Dann ist $n\mathbb{1}_{A_n} \leq g$. Aus der Monotonie des Lebesgue-Integrals folgt

$$n\mu(A_n) = \int\limits_\Omega n\mathbb{1}_{A_n} d\mu \leq \int g d\mu \; .$$

Hieraus folgt $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = 0$. Wegen $A_n \supseteq A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}, \mu(A_1) < \infty$ und der Stetigkeit des Maßes folgt für $A := \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$

$$\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = 0 \; .$$

Also ist A eine Nullmenge. Beachte zudem, dass

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x \in \Omega \colon g(x) = \infty\} \; .$$

□

Wir kommen nun zurück zum Beweis von Satz 9.6.

Beweis (von Satz 9.6.) Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L^p(\Omega)$. Nach Lemma 9.8 reicht es zu zeigen, dass

$$\lim_{k \to \infty} \| f - f_{n_k} \|_p = 0$$

für eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ und ein $f \in L^p(\Omega)$. Wähle eine Teilfolge $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$\| g_{k+1} - g_k \|_p \leq 2^{-k} \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \; .$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} g(x) &:= | g_1(x) | + \sum_{k=1}^{\infty} | g_{k+1}(x) - g_k(x) | \\ &= \lim_{n \to \infty} h_n(x) \end{aligned}$$

mit $h_n =| g_1 | + \sum\limits_{k=1}^{n} | g_{k+1} - g_k |$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Setze $c :=\| g_1 \|_p +1$. Aus der Minkowski-Ungleichung folgt für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \| h_n \|_p &\leq \| g_1 \|_p + \sum_{k=1}^{n} \| g_{k+1} - g_k \|_p \\ &\leq \| g_1 \|_p + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} =\| g_1 \|_p +1 = c \; . \end{aligned}$$

Also haben wir $h_n \leq h_{n+1}$ sowie

$$\int | h_n |^p \, d\mu \leq c^p \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \; .$$

Aus dem Satz von Beppo Levi folgt

$$\int g(x)^p d\mu = \int \lim_{n\to\infty} h_n^p d\mu = \lim_{n\to\infty} \int h_n^p \leq c^p \ .$$

Also ist $g \in L^p(\Omega)$. Setze $A := \{x \in \Omega \colon g(x) < \infty\}$. Sei $x \in A$. Dann ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |g_{k+1}(x) - g_k(x)| < \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} |g_{k+1}(x) - g_k(x)| \leq \varepsilon \ .$$

Sei $m > n \geq k_0$. Dann ist

$$\begin{aligned} 0 \leq |g_m(x) - g_n(x)| &= \left| \sum_{k=n}^{m-1} (g_{k+1}(x) - g_k(x)) \right| \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} |g_{k+1}(x) - g_k(x)| \leq \varepsilon \ . \end{aligned}$$

Somit ist $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge für alle $x \in A$. Setze

$$f(x) := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) & , \quad x \in A \\ 0 & , \quad x \notin A \ . \end{cases}$$

Dann ist f messbar und wegen

$$| \ g_{n+1}(x) \ | \leq | \ g_1(x) \ | + \sum_{k=1}^{n} | \ g_{k+1}(x) - g_k(x) \ | \leq g(x)$$

für $x \in \Omega$ gilt $| \ f(x) \ | \leq g(x) \ \forall \ x \in \Omega$. Damit ist $| \ f - g_n \ | \leq 2g$ und $| \ f - g_n \ |^p \leq 2^p g^p$. Aus dem Satz von Lebesgue folgt nun

$$\int | \ f - g_n \ |^p \ d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

d.h. $\| \ f - g_n \ \|_p \to 0$ für $n \to \infty$. Insbesondere ist $\| \ f \ \|_p \leq \| \ f - g_1 \ \|_p + \| \ g_1 \ \|_p$, also $f \in L^p(\Omega)$ und damit $g_n \to f$ in $L^p(\Omega)$. □

Aus dem Beweis des Satzes erhalten wir folgendes wichtige Korollar.

Korollar 9.9 (Umkehrung des Satzes von Lebesgue)**.** Sei $f_n \to f$ in $L^p(\Omega)$. Dann gibt es eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und ein $g \in L^p(\Omega)$ mit

a) $| \ f_{n_k}(x) \ | \leq g(x)$ fast überall

b) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ fast überall.

Auf die Wahl einer Teilfolge in Korollar 9.9 kann man nicht verzichten.

Beispiele 9.10. Sei $(\Omega, \Sigma) = ([0,1), \mathcal{B}([0,1))$ und λ das Lebesgue-Maß auf $[0,1)$. Betrachte

$$\begin{aligned} f_1 &= \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2})}, f_2 = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1)} \\ f_3 &= \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{4})}, f_4 = \mathbb{1}_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2})}, f_5 = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},\frac{3}{4})}, f_6 = \mathbb{1}_{[\frac{3}{4},1)} \\ f_7 &= \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{8})}, \dots \ . \end{aligned}$$

Dann ist $\| f_n \|_1 \to 0$, also $f_n \to 0$ in L^1, aber $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert für jedes $x \in [0,1)$.

Schließlich wollen wir den Fall $p = 2$ für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ betrachten. Seien $f, g \in L^2(\Omega)$. Da $p' = 2$, ist

$$\int_\Omega | fg | \, d\mu \leq \left(\int_\Omega | f |^2 \, d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega | g |^2 \, d\mu \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Damit ist $f \cdot g \in L^1(\Omega)$. Man setzt

$$(f \mid g) := \int_\Omega fg d\mu \ .$$

Die Abbildung

$$\begin{aligned} L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ (f, g) &\mapsto \int_\Omega fg d\mu \end{aligned}$$

ist bilinear und $(f \mid f) > 0$ wenn $f \neq 0$ in $L^2(\Omega)$. Damit ist $(\cdot \mid \cdot)$ ein Skalarprodukt. Ferner gilt

$$\| f \|_2 = \sqrt{(f \mid f)} \ ,$$

d.h. $\| \cdot \|_2$ ist die durch das Skalarprodukt induzierte Norm. Der Raum $L^2(\Omega)$ ist also ein reeller Hilbertraum; d.h. ein Vektorraum mit einem Skalarprodukt derart, dass er durch die induzierte Norm vollständig wird. Hilberträume spielen eine große Rolle in großen Teilen der Mathematik; in der gesamten Analysis aber auch in der Numerik und Wahrscheinlichkeitstheorie.

10 Der Raum L^∞

Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum. $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ heißt **wesentlich beschränkt**, falls es $c \geq 0$ gibt derart, dass

$$| f | \leq c \text{ f.ü..}$$

Dann setzt man

$$\| f \|_\infty := \inf\{c \geq 0\colon \ | f | \leq c \text{ f.ü.}\}.$$

Lemma 10.1. *Sei $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ wesentlich beschränkt. Es gilt $| f | \leq \| f \|_\infty$ f.ü..*

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ setze

$$A_n := \left\{x \in \Omega\colon \ | f(x) | > \| f \|_\infty + \frac{1}{n}\right\} .$$

Dann ist $\mu(A_n) = 0$. Damit ist $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ eine Nullmenge. Da

$$A = \{x \in \Omega\colon \ | f(x) | > \| f \|_\infty\} ,$$

folgt die Behauptung. □

Definition 10.2. $L^\infty(\Omega) := L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu) := \{f\colon \Omega \to \mathbb{R}\colon f$ *messbar, wesentlich beschränkt*$\}$ *wobei wir vereinbaren, dass*

$$f = g \text{ wenn } f(x) = g(x) \text{ f.ü..}$$

Damit ist $L^\infty(\Omega)$ ein Vektorraum. Dabei sollte man beachten, dass

$$f = f_1 \text{ f.ü.}, \ g = g_1 \text{ f.ü.} \ \Rightarrow f + g = f_1 + g_1 \text{ f.ü..}$$

Bemerkung. Genauer ist $L^\infty(\Omega) = \mathcal{L}^\infty(\Omega)/F$, wobei

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega) := \{f\colon \Omega \to \mathbb{R}\colon \text{ wesentlich beschränkt und messbar}\}$$

und $F = \{f\colon \Omega \to \mathbb{R}\colon$ messbar, $f = 0$ f.ü.$\}$.

Satz 10.3. *$\| \ \|_\infty$ definiert eine Norm auf $L^\infty(\Omega)$ bzgl. der der Raum vollständig ist.*

Beweis. a) Wir zeigen, dass $\| \ \|_\infty$ eine Norm auf $L^\infty(\Omega)$ definiert. Seien $f, g \in L^\infty(\Omega)$. Damit gilt

$$| f(x) | \leq \| f \|_\infty, | g(x) | \leq \| g \|_\infty \text{ f.ü..}$$

Also ist $| f(x)+g(x) | \leq | f(x) | + | g(x) | \leq \| f \|_\infty + \| g \|_\infty$ f.ü.. Aus der Definition folgt, dass $\| f+g \|_\infty \leq \| f \|_\infty + \| g \|_\infty$. Damit ist die Dreiecksungleichung bewiesen. Leicht sieht man, dass $\| \lambda f \|_\infty = | \lambda | \| f \|_\infty$ für $\lambda \in \mathbb{R}$. Ist $\| f \|_\infty = 0$ so folgt aus Lemma 10.1, dass $f(x) = 0$ f.ü., d.h. $f = 0$ nach unserer Vereinbarung.
b) Wir zeigen, dass $L^\infty(\Omega)$ vollständig ist. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L^\infty(\Omega)$. Zu $k \in \mathbb{N}$ gibt es dann $n_k \in \mathbb{N}$ sodass

$$\| f_n - f_m \|_\infty \leq \frac{1}{k} \text{ für alle } n, m \geq n_k \ . \tag{10.1}$$

Somit existiert eine Nullmenge $N^k_{n,m} \in \Sigma$ sodass $| f_n(x) - f_m(x) | \leq \frac{1}{k}$ für $x \notin N^k_{n,m}$. Auch $N^k := \bigcup\limits_{n,m\geq n_k} N^k_{n,m}$ ist eine messbare Nullmenge und es ist

$$| f_n(x) - f_m(x) | \leq \frac{1}{k}$$

für alle $n, m \geq n_k$ und alle $x \in \Omega \setminus N^k$. Damit ist $N := \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} N^k$ eine messbare Nullmenge und $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge falls $x \in \Omega \setminus N$. Setze $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ wenn $x \in \Omega \setminus N$ und $f(x) = 0$ wenn $x \in N$. Dann ist f messbar. Sei $x \in \Omega \setminus N$. Dann ist

$$| f_n(x) - f_m(x) | \leq \frac{1}{k} \text{ für alle } m, n \geq n_k \ .$$

Indem wir m nach ∞ schicken sehen wir, dass $| f_n(x) - f(x) | \leq \frac{1}{k}$ für alle $n \geq n_k$ und alle $x \in \Omega \setminus N$. Also ist

$$\| f_n - f \|_\infty \leq \frac{1}{k} \text{ für alle } n \geq n_k \ .$$

Damit ist $f \in L^\infty(\Omega)$ (da $f = (f - f_{n_1}) + f_{n_1}$) und $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ bzgl. der Norm $\| \ \|_\infty$. $\square$

Wir haben also gezeigt, dass $L^\infty(\Omega)$ ein Banachraum ist. Die Konvergenz bzgl. $\|\|_\infty$ ist interessant. Für $f_n, f \in L^\infty(\Omega)$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \| f_n - f \|_\infty = 0$ genau dann, wenn es eine Nullmenge N gibt derart, dass $f_n(x) \to f(x)$ gleichmäßig auf $\Omega \setminus N$ konvergiert. Das haben wir eben mitbewiesen.

Wir schließen mit einem Vergleich der L^p-Räume.

Satz 10.4. *Sei $\mu(\Omega) < \infty$. Dann gilt für $1 \leq p \leq q \leq \infty$,*

$$L^\infty(\Omega) \subset L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^1(\Omega) \ .$$

Wir lassen den Nachweis mittels der Hölderschen Ungleichung als Übungsaufgabe.

11 Eindeutigkeit von Maßen

In diesem Abschnitt schauen wir uns Mengensysteme $\mathcal{E}$ an, die noch keine σ-Algebren bilden. Wir wollen uns überlegen, unter welchen Umständen ein Maß μ, das auf $\sigma(\mathcal{E})$ definiert ist, schon eindeutig durch seine Werte $\mu(E)$ mit $E \in \mathcal{E}$ definiert ist. Man denke sich als Beispiel die Menge aller Intervalle $\mathcal{A} = \{[a,b) \colon -\infty < a < b < \infty\}$, auf der wir $\mu([a,b)) = b - a$ in natürlicher Weise setzen können. Unser (noch unbewiesener) Satz über das Lebesguemaß sagt, dass wir μ eindeutig auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ fortsetzen können. In diesem Abschnitt beweisen wir Eindeutigkeit. Diese geht auch entscheidend in die Konstruktion von Produktmaßen im nächsten Abschnitt ein.
Sei Ω eine nicht-leere Menge. Wir definieren zwei Eigenschaften von Mengensystemen auf Ω.

Definition 11.1. *Ein Mengensystem auf $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt* ***monotone Klasse****, falls folgende zwei Bedingungen gelten:*

(M$_1$) $A_n \in \mathcal{M}, A_n \subset A_{n+1} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$;

(M$_2$) $B_n \in \mathcal{M}, B_n \supset B_{n+1} \Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{M}$.

Wir benötigen eine zweite Klasse von Mengensystemen.

Definition 11.2. *Ein Mengensystem $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt* ***Dynkinsystem****, falls*

(D$_1$) $\Omega \in \mathcal{D}$;

(D$_2$) $A \in \mathcal{D} \Rightarrow A^c \in \mathcal{D}$;

(D$_3$) $A_n \in \mathcal{D}, A_n \cap A_m = \emptyset$ *für* $n \neq m \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$.

Beim Dynkinsystem ist also die dritte Forderung für σ-Algebren abgeschwächt: ein Dynkinsystem ist nur abgeschlossen bzgl. abzählbarer disjunkter Vereinigungen. Der Bezug von Dynkinsystemen zu monotonen Klassen wird im folgenden Satz hergestellt.

Satz 11.3. *Ein Mengensystem $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ist genau dann ein Dynkinsystem, wenn gilt:*

(a) $\Omega \in \mathcal{D}$;

(b) $A, B \in \mathcal{D}, B \subset A \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{D}$;

(c) $\mathcal{D}$ *ist eine monotone Klasse.*

Beweis. „⇒“. Sei $\mathcal{D}$ ein Dynkinsystem.
1. Wir zeigen (b). Seien $A, B \in \mathcal{D}, B \subset A$. Dann ist $A^c \cap B = \emptyset$. Somit ist $A^c \cup B \in \mathcal{D}$. Also ist auch

$$A \setminus B = A \cap B^c = (A^c \cup B)^c \in \mathcal{D} \ .$$

2. Sei $A_n \in \mathcal{D}, A_n \subset A_{n+1}$. Setze

$$B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, \ldots, B_n = A_{n+1} \setminus A_n \ .$$

Dann sind die B_n paarweise disjunkt. Da $\mathcal{D}$ ein Dynkinsystem ist, ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{D}$. Da $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ ist $\mathcal{D}$ also abgeschlossen bzgl. aufsteigender abzählbarer Vereinigung.
3. Seien $B_n \in \mathcal{D}, B_n \supset B_{n+1}$. Dann ist

$$\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n^c \in \mathcal{D}$$

nach 2. Also ist auch $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{D}$. Wir haben gezeigt, dass $\mathcal{D}$ eine monotone Klasse ist.
„⇐“. 1.
Sei $A \in \mathcal{D}$. Dann ist $A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{D}$ nach (b) und (a). Es gilt also (D_2).
2. Seien $A, B \in \mathcal{D}$, sodass $A \cap B = \emptyset$. Dann ist $B \subset A^c$. Somit ist

$$A^c \cap B^c = A^c \setminus B \in \mathcal{D} \ .$$

Folglich ist

$$A \cup B = (A^c \cap B^c)^c \in \mathcal{D} \ .$$

3. Wir zeigen (D_3). Seien $A_n \in \mathcal{D}$ mit $A_n \cap A_m = \emptyset$ für $n \neq m$. Damit ist $B_n := \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{D}$ nach 2. Da $B_n \subset B_{n+1}$ ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{D}$, da $\mathcal{D}$ eine monotone Klasse ist. □

Definition 11.4. *Ein Mengensystem $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt* ***durchschnittstabil*** *(schreibe $\cap$-stabil) falls*

$$A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{M} \ .$$

Satz 11.5. *Ein Dynkinsystem ist genau dann eine σ-Algebra, wenn es $\cap$-stabil ist.*

Beweis. Sei $\mathcal{D}$ ein $\cap$-stabiles Dynkinsystem. Wir zeigen, dass $\mathcal{D}$ eine σ-Algebra ist.
1. Seien $A, B \in \mathcal{D}$. Wir zeigen, dass $A \cup B \in \mathcal{D}$. Nach Voraussetzung ist $A \cap B \in \mathcal{D}$, also auch

$$A_1 := A \setminus (A \cap B), B_1 := B \setminus (A \cap B)$$

nach Satz 11.3. Da die Mengen $A_1, B_1, A \cap B$ paarweise disjunkt und ihre Vereinigung $A \cup B$ ist, folgt $A \cup B \in \mathcal{D}$.
2. Sei $A_n \in \mathcal{D}$. Nach 1. ist $B_n := A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{D}$. Da $\mathcal{D}$ nach Satz 11.3 eine monotone Klasse ist, ist

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{D} \ .$$

□

Definition 11.6. *Für $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt*

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{E}\subset\mathcal{D}\subset\mathcal{P}(\Omega) \\ \mathcal{D} \text{ Dynkinsystem}}} \mathcal{D}$$

das ***von $\mathcal{E}$ erzeugte Dynkinsystem****.*

Damit ist also $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ das kleinste Dynkinsystem $\mathcal{D}$ mit $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$.

Satz 11.7. *Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ $\cap$-stabil. Dann ist $\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$.*

Beweis. Da jede σ-Algebra ein Dynkinsystem ist, gilt $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{E})$. Um die umgekehrte Inklusion zu zeigen, müssen wir beweisen, dass $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ eine σ-Algebra ist. Nach Satz 11.5 reicht es zu zeigen, dass $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ $\cap$-stabil ist. Sei $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$. Wir setzen

$$\mathcal{G}(D) := \{M \subset \Omega \colon M \cap D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})\}$$

und wollen zeigen, dass $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{G}(D)$. Das geschieht in zwei Schritten:
1. $\mathcal{G}(D)$ ist ein Dynkinsystem.
a) $\Omega \in \mathcal{G}(D)$ da $\Omega \cap D = D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$.
b) Sei $M \in \mathcal{G}(D)$, d.h. $M \cap D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$. Dann ist $M^c \cap D = D \setminus M = D \setminus (M \cap D) \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$. Also ist $M^c \in \mathcal{G}(D)$.
c) Sei $M_n \in \mathcal{G}(D), M_n \cap M_k = \emptyset$ für $n \neq k$. Es ist also $M_n \cap D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$. Damit ist

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n\right) \cap D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (M_n \cap D) \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \ .$$

Also ist $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} M_n \in \mathcal{G}(D)$. Wir haben also gezeigt, dass $\mathcal{G}(D)$ für jedes $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ ein Dynkinsystem ist.
2. Sei $E \in \mathcal{E}$. Da $\mathcal{E}$ $\cap$-stabil ist, ist $\mathcal{E} \subset \mathcal{G}(E)$. Da $\mathcal{G}(E)$ ein Dynkinsystem ist, folgt $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{G}(E)$. Wir haben also gezeigt, dass für $E \in \mathcal{E}, D \cap E \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ (wobei $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ oben gewählt worden war). Damit ist $\mathcal{E} \subset \mathcal{G}(D)$, also auch $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{G}(D)$. Das war zu beweisen. $\square$

Nun können wir den gewünschten Eindeutigkeitssatz beweisen.

Satz 11.8 (Eindeutigkeitssatz)**.** *Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ $\cap$-stabil und $\Sigma := \sigma(\mathcal{E})$. Seien $\mu, \nu \colon \Sigma \to [0, \infty]$ Maße, sodass*

$$\mu(E) = \nu(E) \text{ für alle } E \in \mathcal{E} \ .$$

Es gebe $E_k \in \mathcal{E}$ mit $\mu(E_k) < \infty$, sodass $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k = \Omega$. Dann gilt $\mu = \nu$.

Beweis. 1. Sei $E \in \mathcal{E}$ fest, $\mu(E) < \infty$. Wir zeigen, dass $\mu(A \cap E) = \nu(A \cap E)$ für alle $A \in \Sigma$.
Setze $\mathcal{A} := \{A \in \Sigma : \mu(A \cap E) = \nu(A \cap E)\}$. Da $\mathcal{E}$ $\cap$-stabil ist, gilt $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$. Wir zeigen,

dass $\mathcal{A}$ ein Dynkinsystem ist.
a) $\Omega \in \mathcal{A}$, da $\Omega \cap E = E$.
b) Sei $A \in \mathcal{A}$. Dann ist

$$\mu(A^c \cap E) = \mu(E \setminus (A \cap E)) = \mu(E) - \mu(A \cap E) = \nu(E) - \nu(A \cap E) = \nu(A^c \cap E) \ .$$

Somit ist $A^c \in \mathcal{A}$.
c) Sei $A_n \in \mathcal{A}$ mit $A_n \cap A_m = \emptyset$ für $n \neq m$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mu\left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cap E\right) &= \mu \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap E) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n \cap E) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n \cap E) \\
&= \nu\left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cap E\right) \ .
\end{aligned}$$

Also ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$. Wir haben gezeigt, dass $\mathcal{A}$ ein Dynkinsystem ist. Da $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$, folgt $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$. Nach Satz 11.7 ist $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{D}(\mathcal{E})$. Also ist $\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$. Wir haben also gezeigt, dass

$$\mu(E \cap A) = \nu(E \cap A)$$

für alle $A \in \sigma(\mathcal{E}) = \Sigma$.
2. Sei $F_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$. Wir zeigen, dass $\mu(F_n \cap A) = \nu(F_n \cap A)$ für alle $A \in \Sigma$. Für $n = 1$ ist das gerade Schritt 1. Die Aussage sei richtig für $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen, dass sie dann auch für $n+1$ gilt. Es ist

$$\begin{aligned}
\mu(F_{n+1} \cap A) &= \\
\mu((A \cap E_{n+1}) &\ \dot{\cup}\ [(A \cap F_n) \setminus (A \cap E_{n+1} \cap F_n)]) = \\
\mu(A \cap E_{n+1}) &+ \mu(A \cap F_n) - \mu(A \cap E_{n+1} \cap F_n) = \\
\nu(A \cap E_{n+1}) &+ \nu(A \cap F_n) - \nu(A \cap E_{n+1} \cap F_n) = \\
\nu(F_{n+1} \cap A) \ .&
\end{aligned}$$

Damit haben wir die Aussage durch Induktion bewiesen.
3. Sei $A \in \Sigma$. Dann ist

$$\mu(A) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(A \cap F_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \nu(A \cap F_n) = \nu(A) \ .$$

$\square$

Beispiel 11.9. Sei $\mathcal{E} = \{[a,b)\colon -\infty < a < b < \infty\}$. Dann ist $\mathcal{E}$ $\cap$-stabil und $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, die Borel-$\sigma$-Algebra auf $\mathbb{R}$. Wir hatten als einzigen unbewiesenen Satz formuliert, dass genau ein Maß $\lambda\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ gibt mit $\lambda([a,b)) = b-a$ für alle $[a,b) \in \mathcal{E}$. Satz 11.8 liefert nun die Eindeutigkeit.

Beispiel 11.10. Sei $d \in \mathbb{N}$ und sei $\mathcal{E}$ die Menge der Quader

$$\prod_{j=1}^{d} [a_j, b_j)$$

mit $-\infty < a_j < b_j < \infty$, $j = 1, \ldots, d$. Das System $\mathcal{E}$ ist $\cap$-stabil und $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Satz 11.8 liefert also den Beweis der Eindeutigkeit des Lebesguemaßes wie wir es in Theorem 2.1 formuliert hatten.

Wir wollen in diesem Abschnitt noch einen weiteren „Erzeugersatz“ beweisen.

Definition 11.11. *Sei Ω eine Menge. Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt **Algebra** falls*

a) $\emptyset \in \mathcal{A}$

b) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

c) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.

Folgerung. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B, A \setminus B, B \setminus A \in \mathcal{A}$. Eine Algebra ist somit gegenüber allen endlichen Mengenoperationen abgeschlossen. Eine σ-Algebra ist eine Algebra die auch eine monotone Klasse ist.

Ist $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ irgendein Mengensystem, so bezeichnen wir mit

$$\mathcal{M}(\mathcal{E}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{E} \subset \mathcal{M} \\ \mathcal{M} \text{ monotone Klasse}}} \mathcal{M}$$

die kleinste monotone Klasse, die $\mathcal{E}$ umfasst. $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ heißt **die von $\mathcal{E}$ erzeugte monotone Klasse**. Nun beweisen wir folgenden Satz.

Satz 11.12 (Monotone-Klassen-Lemma)**.** *Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eine Algebra. Dann gilt*

$$\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{M}(\mathcal{A}) \; .$$

Beweis. Man muss zeigen, dass $\mathcal{M} := \mathcal{M}(\mathcal{A})$ eine σ-Algebra ist.
1. Sei $E \in \mathcal{M}$. Setze

$$\mathcal{M}(E) := \{F \in \mathcal{M}\colon F \setminus E, E \setminus F, E \cap F \in \mathcal{M}\} \; .$$

Wir zeigen, dass $\mathcal{M}(E)$ eine monotone Klasse ist. Denn sind

$$F_n \in \mathcal{M}(E), F_n \subset F_{n+1}, F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \; ,$$

so ist $F \setminus E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (F_n \setminus E) \in \mathcal{M}$, da $F_n \setminus E \in \mathcal{M}$. Ähnlich ist

$$E \setminus F = E \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \right)^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (E \setminus F_n) \in \mathcal{M}$$

und auch $E \cap F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E \cap F_n \in \mathcal{M}$. Somit ist $F \in \mathcal{M}(E)$.

Ähnlich sieht man, dass für $G_n \in \mathcal{M}(E)$ mit $G_n \supset G_{n+1}, G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$ gilt $G \in \mathcal{M}(E)$. Damit ist $\mathcal{M}(E)$ eine monotone Klasse.

2. Sei nun $E \in \mathcal{A}$. Da $\mathcal{A}$ eine Algebra ist, ist $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}(E)$. Folglich ist

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}(E) \subset \mathcal{M} \; .$$

Also ist $\mathcal{M}(E) = \mathcal{M}$ falls $E \in \mathcal{A}$.

3. Für $E, F \in \mathcal{M}$ gilt offensichtlich $E \in \mathcal{M}(F) \Leftrightarrow F \in \mathcal{M}(E)$.

4. Nach 2. gilt

$$F \in \mathcal{M}(E) \text{ falls } F \in \mathcal{M}, E \in \mathcal{A} \; .$$

Also $E \in \mathcal{M}(F)$ falls $F \in \mathcal{M}, E \in \mathcal{A}$ wegen 3. Damit ist $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}(F)$ für alle $F \in \mathcal{M}$. Folglich ist nach 1.

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}(F) \; , \text{ also } \mathcal{M} = \mathcal{M}(F) \text{ für alle } F \in \mathcal{M} \; .$$

Damit ist $\mathcal{M}$ eine Algebra (beachte, dass $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$). Da $\mathcal{M}$ eine monotone Klasse ist, ist $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra. $\square$

12 Produktmaße

Ein Maßraum (Ω, Σ, μ) heißt **endlich** falls $\mu(\Omega) < \infty$. Er heißt **σ-endlich**, falls es $A_n \in \Sigma$ gibt derart, dass

$$\mu(A_n) < \infty \text{ und } \Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \ .$$

Beispiel 12.1. Sei $\Omega = \mathbb{R}, \Sigma = \mathcal{P}(\Omega), \mu(A) = A$ (die Anzahl der Elemente von A). Dann ist (Ω, Σ, μ) nicht σ-endlich.

In diesem Abschnitt wollen wir das Produktmaß bzgl. zweier σ-endlicher Maßräume untersuchen. Hier ist die Voraussetzung der σ-Endlichkeit wesentlich.

Sei $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu)$ und $(\Omega_2, \Sigma_2, \nu)$ zwei σ-endliche Maßräume. Wir setzen $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. Mit $\Sigma := \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ bezeichnen wir die kleinste σ-Algebra, die die Mengen der Form $A_1 \times A_2$ mit $A_1 \in \Sigma_1, A_2 \in \Sigma_2$ enthält.

Satz 12.2. *Es gibt genau ein Maß*

$$\pi \colon \Sigma \to [0, \infty] \textit{ derart, dass } \pi(A_1 \times A_2) = \mu(A_1) \cdot \nu(A_2)$$

für alle $A_1 \in \Sigma_1, A_2 \in \Sigma_2$.

Bezeichnung. Man setzt $\mu_1 \otimes \mu_2 := \pi$ und nennt π das Produktmaß von μ und ν. Aus den zwei Maßräumen $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu)$ und $(\Omega_2, \Sigma_2, \nu)$ haben wir somit den neuen Maßraum

$$(\Omega_1 \times \Omega_2, \Sigma_1 \otimes \Sigma_2, \mu \otimes \nu)$$

konstruiert, den wir weiterhin mit (Ω, Σ, π) abkürzen.

Beispiel 12.3. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m}), \lambda_n \otimes \lambda_m = \lambda_{n+m}$. Hier bezeichnet λ_n das Lebesguemaß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Wir lassen den Nachweis als Übungsaufgabe.

Beweis der Eindeutigkeit. Seien $\pi_1, \pi_2 \colon \Sigma \to [0, \infty]$ zwei Maße mit $\pi_j(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ für alle $A \in \Sigma_1, B \in \Sigma_2$, $j = 1, 2$. Die Menge $\mathcal{E} := \{A \times B \colon A \in \Sigma_1, B \in \Sigma_2\}$ ist $\cap$-stabil, denn

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) \ .$$

Nach Definition ist $\Sigma = \sigma(\mathcal{E})$. Es gibt $A_k \in \Sigma_1$ mit $\mu(A_k) < \infty$, sodass $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = \Omega_1$ und $B_k \in \Sigma_2$ mit $\mu(B_k) < \infty$, sodass

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \Omega_2 \ .$$

Damit ist $\pi_1(A_k \times B_\ell) < \infty$ und $\bigcup_{(k,\ell)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} (A_k \times B_\ell) = \Omega$. Da $\pi_1(A \times B) = \pi_2(A \times B)$ für alle $A \times B \in \mathcal{E}$, folgt aus dem Eindeutigkeitssatz 11.8, dass $\pi_1 = \pi_2$. □

Für den Beweis der Existenz von π benötigen wir etwas Vorbereitung.

Lemma 12.4. *Sei $E \in \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$. Sei $x \in \Omega_1, y \in \Omega_2$. Dann gilt für die* ***Sektionen*** *(oder* ***Schnitte****)*

$$\begin{aligned} E_x &:= \{y \in \Omega_2\colon (x,y) \in E\} \in \Sigma_2 \ , \\ E^y &:= \{x \in \Omega_1\colon (x,y) \in E\} \in \Sigma_1 \ . \end{aligned}$$

Beweis. Wir müssen nur die erste Aussage beweisen; die zweite folgt daraus aus Symmetriegründen. Sei $x \in \Omega_1$. Wir definieren

$$\mathcal{A} := \{E \subset \Omega\colon E_x \in \Sigma_2\} \ .$$

1. Es gilt $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$. Denn sei $A \times B \in \mathcal{E}$. Dann ist $(A \times B)_x = B$ wenn $x \in A$ und $(A \times B)_x = \emptyset$, wenn $x \notin A$. In jedem Fall ist $(A \times B)_x \in \Sigma_2$.
2. Wir zeigen, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist.

(a) $\Omega \in \mathcal{A}$ da $\Omega_x = \Omega_2 \in \Sigma_2$.

(b) Sei $E \in \mathcal{A}$. Dann ist $(E^c)_x = (E_x)^c \in \Sigma_2$.

(c) Sei $E_k \in \mathcal{A}, E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Dann ist

$$\begin{aligned} E_x &= \{y \in \Omega_2\colon \exists\, k \in \mathbb{N} \quad (x,y) \in E_k\} \\ &= \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_{kx} \in \Sigma_2 \ . \end{aligned}$$

Somit ist $E \in \mathcal{A}$.
3. Da $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist, und $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ ist $\Sigma = \sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$. Das ist genau die erste Aussage des Lemmas. □

Lemma 12.5. $\mathcal{A} := \{\bigcup_{k=1}^{n} E_k\colon n \in \mathbb{N}, E_k \in \mathcal{E}\}$ *ist eine Algebra. Jedes Element aus $\mathcal{A}$ kann als disjunkte Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{E}$ geschrieben werden.*

a) Sei $A \times B \in \mathcal{E}$. Dann ist

$$(A \times B)^c = (A^c \times \Omega_2) \cup (\Omega_1 \times B^c) \in \mathcal{A} \ .$$

b) Da $\mathcal{E}$ $\cap$-stabil ist, folgt dass $\mathcal{A}$ $\cap$-stabil ist.
c) Sei $A = \bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{A}$ mit $E_k \in \mathcal{E}$. Dann ist $A^c = \bigcap_{k=1}^{n} E^c \in \mathcal{A}$ nach a) und b).
d) Da die Maßräume σ-endlich sind, ist $\Omega \in \mathcal{A}$. Wir haben gezeigt, dass $\mathcal{A}$ eine Algebra ist. Die zweite Aussage lassen wir als Übungsaufgabe (man mache eine Zeichnung!). □

Lemma 12.6. *Sei $E \in \Sigma$. Dann gilt*

a) $x \mapsto \nu(E_x)\colon \Omega_1 \to [0, \infty]$ *ist messbar und*

b) $\pi(E) = \int\limits_{\Omega_1} \nu(E_x) d\mu(x)$ *definiert ein* ***Produktmaß*** *auf* Σ *(d.h. ein Maß für das* $\pi(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ *für alle* $A \in \Sigma_1, B \in \Sigma_2$*) gilt.*

Beweis. 1. Fall: Wir nehmen an, dass die Maße μ und ν endlich sind.
a) Sei $\mathcal{M} := \{E \in \Sigma\colon x \mapsto \nu(E_x) \text{ ist messbar}\}$.
1. Es gilt $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}$, da $\nu((A \times B)_x) = 1_A \mu(B)$ messbar ist.
2. Nach Lemma 12.5 lässt sich jedes $F \in \mathcal{A}$ in der Form $F = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \times B_k$ mit

$$(A_k \times B_k) \cap (A_m \times B_m) = \emptyset$$

für $m \neq k, A_k \in \Sigma_1, B_k \in \Sigma_2$ schreiben. Damit ist $\nu(F_x) = \sum\limits_{k=1}^{n} 1_{A_k} \nu(B_k)$ messbar für jedes $F \in \mathcal{A}$. Wir haben gezeigt, dass $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$.
3. $\mathcal{M}$ ist eine monotone Klasse.

(a) Seien nämlich $E_k \in \mathcal{M}$ mit $E_k \subset E_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und sei $E = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} E_k$. Dann ist $E_x = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_{kx}$ und $x \mapsto \nu(E_x) = \sup\limits_{k \in \mathbb{N}} \nu(E_{kx})$ messbar.

(b) Sei $F_k \in \mathcal{M}$ mit $F_{k+1} \subset F_k, F = \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} F_k$, so ist $F_x = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_{kx}$ und somit ist

$$x \mapsto \nu(F_x) = \inf_{k \in \mathbb{N}} \nu(F_{kx}) \text{ messbar } .$$

Hier benutzen wir, dass das Maß ν endlich ist.
4. Da $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$, ist nach Satz 11.12 $\Sigma = \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{M}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}$. Wir haben gezeigt, dass $\Sigma = \mathcal{M}$.
b) Sei $E_k \in \Sigma, E_k \cap E_\ell = \emptyset$ für $k \neq \ell$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\pi\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) &= \int\limits_{\Omega_1} \nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_{kx}\right) d\mu(x) \\
&= \int\limits_{\Omega_1} \sum_{k=1}^{\infty} \nu(E_{kx}) d\mu(x) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \pi(E_k) \ .
\end{aligned}$$

Wir haben den Satz für endliche Maße bewiesen.
2. Fall: Da die Maßräume σ-endlich sind, können wir Ω schreiben als $\Omega = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$ mit

$\Omega_n = A_n \times B_n$ mit $\mu(A_n) < \infty, \mu(B_n) < \infty$. Jetzt wenden wir den ersten Fall auf $E \cap \Omega_n$ an. Der Satz von Beppo-Levi liefert dann die Behauptung. □

Damit ist Satz 12.2 bewiesen und wir haben sogar die Darstellung

$$\pi(E) = \int_{\Omega_1} \nu(E_x) d\mu(x) \quad (E \in \Sigma) \tag{12.1}$$

für das Produktmaß π erhalten. Indem wir die Rollen von Ω_1 und Ω_2 vertauschen sehen wir, dass für jedes $E \in \Sigma$ die Funktion $y \mapsto \mu(E^y)$ messbar ist und wegen der Eindeutigkeit

$$\pi(E) = \int_{\Omega_2} \mu(E^y) d\nu(y) \ . \tag{12.2}$$

Nun wollen wir untersuchen, wie man Funktionen bzgl. π integriert.

Lemma 12.7. *Sei $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar. Definiere $f_a : \Omega_2 \to \bar{\mathbb{R}}$ durch $f_a(y) := f(a, y)$ und $f^b : \Omega_1 \to \bar{\mathbb{R}}$ durch $f^b(x) := f(x, b)$ wobei $a \in \Omega_1, b \in \Omega_2$. Dann sind f_a und f^b messbar.*

Beweis. Sei $s \in \mathbb{R}, E = \{(x, y) \in \Omega : f(x, y) > s\}$. Dann ist $E \in \Sigma$, da f messbar ist. Also ist $E_a = \{y \in \Omega_2 : f(a, y) > s\} = \{y \in \Omega_2 : f_a(y) > s\}$ in Σ_1. □

Der folgende Satz zeigt, dass Integrale bzgl. π durch iterierte Integrale bzgl. μ und ν berechnet werden können.

Theorem 12.8 (Tonelli)**.** *Sei $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to [0, \infty]$ messbar. Dann sind die Funktionen*

$$\begin{aligned} x &\mapsto \int_{\Omega_2} f(x, y) d\nu(y) \quad : \quad \Omega_1 \to [0, \infty] \text{ und} \\ y &\mapsto \int_{\Omega_1} f(x, y) d\mu(x) \quad : \quad \Omega_2 \to [0, \infty] \end{aligned}$$

messbar und

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f d\pi &= \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f(x, y) d\nu(y) d\mu(x) \\ &= \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} f(x, y) d\mu(x) d\nu(y) \ . \end{aligned}$$

Beweis. a) Sei $E \in \Sigma, f = 1_E$. Dann ist $f(x,y) = 1_{E_x}(y)$ für alle $y \in \Omega_2$. Also ist $\int\limits_{\Omega_2} f(x,y)d\nu(y) = \nu(E_x)$ und

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega_1}\int\limits_{\Omega_2} f(x,y)d\nu(y)d\mu(x) &= \int\limits_{\Omega_1} \nu(E_x)d\mu(x) \\ &= \pi(E) = \int\limits_{\Omega} f d\pi \ .\end{aligned}$$

Die Aussage des Theorems 12.8 stimmt also für $f = 1_E$. Damit stimmt sie auch für einfache Funktion.
b) Sei $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ und $f \colon \Omega \to [0,\infty]$ messbar. Nach Theorem 4.13 gibt es einfache Funktionen $f_n \colon \Omega \to [0,\infty)$ derart, dass $f_n \le f_{n+1}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x,y) = f(x,y)$ für alle $(x,y) \in \Omega$. Aus dem Satz von Beppo Levi folgt dass

$$\int\limits_{\Omega_2} f(x,y)d\nu(y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{\Omega_2} f_n(x,y)d\nu(y) \ .$$

Damit ist $x \mapsto \int\limits_{\Omega_2} f(x,y)d\nu(y) \colon \Omega_1 \to [0,\infty]$ messbar und aus dem Satz von Beppo Levi und a) folgt

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega} f d\pi &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{\Omega} f_n d\pi \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{\Omega_1}\int\limits_{\Omega_2} f_n(x,y)d\nu(y)d\mu(x) \\ &= \int\limits_{\Omega_1} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{\Omega_2} f_n(x,y)d\nu(y)d\mu(x) \\ &= \int\limits_{\Omega_1}\int\limits_{\Omega_2} f(x,y)d\nu(y)d\mu(x).\end{aligned}$$

Damit haben wir die eine Identität in dem Satz bewiesen. Die andere ergibt sich durch Vertauschen der Rolle der Variablen. □

Es ist günstig unsere Definition der Integrierbarkeit auf Funktionen zu erweitern, die nur fast überall definiert sind.

Definition 12.9. *Sei $(S,\mathcal{F},\lambda)$ ein Maßraum und $f \colon S \to \mathbb{R}$ fast überall definiert. Wir nennen f **integrierbar**, falls es eine integrierbare Funktion $\tilde{f} \colon S \to \mathbb{R}$ gibt, sodass $f = \tilde{f}$ f.ü.. Dann setzen wir*

$$\int\limits_S f d\lambda := \int\limits_S \tilde{f} d\lambda \ .$$

Es ist klar, dass diese Definition nicht von der Wahl von $\tilde{f}$ abhängt.

Weiterhin betrachten wir $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2, \Sigma = \Sigma_1 \otimes \Sigma_2, \pi = \mu \otimes \nu$.

Theorem 12.10 (Fubini). *Sei* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *messbar,* $\int\limits_\Omega |f| d\pi < \infty$. *Dann ist*

$$f(x, \cdot) : \Omega_2 \to \mathbb{R} \text{ für f.a. } x \in \Omega_1$$

integrierbar, und $f(\cdot, y) : \Omega_1 \to \mathbb{R}$ *für fast alle* $y \in \Omega_2$. *Die Funktionen*

$$\begin{aligned} x &\mapsto \int\limits_{\Omega_2} f(x,y) d\nu(y) \quad : \quad \Omega_1 \to \mathbb{R} \text{ und} \\ y &\mapsto \int\limits_{\Omega_1} f(x,y) d\mu(x) \quad : \quad \Omega_2 \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

sind integrierbar. Ferner ist

$$\begin{aligned} \int\limits_\Omega f d\pi &= \int\limits_{\Omega_1} \int\limits_{\Omega_2} f(x,y) d\nu(y) d\mu(x) \\ &= \int\limits_{\Omega_2} \int\limits_{\Omega_1} f(x,y) d\mu(x) d\nu(y) \ . \end{aligned}$$

Beweis. Aus dem Satz von Tonelli folgt, dass

$$\int\limits_{\Omega_1} \int\limits_{\Omega_2} f^+(x,y) d\nu(y) d\mu(x) = \int\limits_\Omega f^+ d\pi \leq \int\limits_\Omega |f| d\pi < \infty \ .$$

Damit ist $g_1(x) := \int\limits_{\Omega_2} f^+(x,y) d\nu(y) < \infty$ μ–f.ü.. Genauso ist

$$g_2(x) := \int\limits_{\Omega_2} f^-(x,y) d\nu(y) < \infty \ \mu - \text{f.ü..}$$

Nach dem Satz von Tonelli sind g_1 und g_2 integrierbar, also ist es auch $g = g_1 - g_2$. Mit Hilfe des Satzes von Tonelli sehen wir, dass

$$\begin{aligned} \int\limits_\Omega f d\pi &= \int\limits_\Omega f^+ d\pi - \int\limits_\Omega f^- d\pi \\ &= \int\limits_{\Omega_1} g_1(x) d\mu(x) - \int\limits_{\Omega_1} g_2(x) d\mu(x) \\ &= \int\limits_{\Omega_1} (g_1(x) - g_2(x)) d\mu(x) \\ &= \int\limits_{\Omega_1} \int\limits_{\Omega_2} f(x,y) d\nu(y) d\mu(x) \ . \end{aligned}$$

$\square$

Man kann den Satz von Tonelli benutzen um $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,\mathrm{dx}$ zu berechnen. Das folgende Argument stammt von P. S. Laplace (1749–1827): Mémoire sur les probabilités (1778).

Beispiel 12.11. Es ist einerseits

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \int_0^\infty y e^{-(1+x^2)y^2}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dx} = \\
-&\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{2}(1+x^2)^{-1}\frac{d}{\mathrm{dy}}e^{-(1+x^2)y^2}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dx} \\
=&\int_0^\infty \frac{1}{2}(1+x^2)^{-1}\,\mathrm{dx} \\
=&\frac{1}{2}\arctan x\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{4}\ .
\end{aligned}$$

Wenden wir den Satz von Tonelli an so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} &= \int_0^\infty \int_0^\infty y e^{-(1+x^2)y^2}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dx} \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty y e^{-(1+x^2)y^2}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} \\
&= \int_0^\infty y e^{-y^2} \int_0^\infty e^{-(xy)^2}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} \\
&= \int_0^\infty e^{-y^2} \int_0^\infty e^{-z^2}\,dz\,\mathrm{dy} \\
&= \left(\int_0^\infty e^{-y^2}\,\mathrm{dy}\right)^2 .
\end{aligned}$$

Damit ist $\int_0^\infty e^{-y^2}\,\mathrm{dy} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, also $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{dy} = \sqrt{\pi}$. $\square$

13 Äußere Maße

Wir wollen nun eine Methode kennenlernen Maße zu konstruieren. Sei Ω eine Menge.

Definition 13.1. *Eine Funktion $m\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0,\infty]$ heißt **äußeres Maß** falls*

(a) $m(\emptyset) = 0$

(b) $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \Rightarrow m(A) \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} m(A_k)$.

*Die Eigenschaft (b) nennen wir σ-**Subadditivität**.*

Aus (b) folgt unmittelbar die **Monotonie**

$$A \subset B \Rightarrow m(A) \leq m(B) \ .$$

Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, dass man sehr leicht ein äußeres Maß auf $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ konstruieren kann, das auf Intervallen mit der Intervalllänge übereinstimmt. Deswegen ist die folgende elegante Methode insbesondere geeignet, das Lebesguemaß zu konstruieren. Sie stammt von Carathéodory und assoziiert zu jedem äußeren Maß eine natürliche σ-Algebra Σ_m, sodass die Einschränkung von m auf Σ_m ein Maß ist.

Sei Ω eine Menge und $m\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0,\infty]$ ein äußeres Maß.

Definition 13.2. *Eine Menge $A \subset \Omega$ heißt **messbar**, wenn*

$$m(Q) = m(Q \cap A) + m(Q \cap A^c) \tag{13.1}$$

für alle $Q \subset \Omega$ gilt. Mit Σ_m bezeichnen wir die Menge aller messbaren Teilmengen von Ω.

Bemerkung. $A \subset \Omega$ ist genau dann messbar, wenn

$$m(Q) \geq m(Q \cap A) + m(Q \cap A^c) \text{ für alle } Q \subset \Omega \ , \tag{13.2}$$

da die umgekehrte Ungleichung immer gilt.

Satz 13.3 (C. Carathéodory 1914)**.** *Die Menge Σ_m ist eine σ-Algebra und m eingeschränkt auf Σ_m ist ein Maß.*

Beweis. a) Es ist unmittelbar klar, dass $\Omega \in \Sigma_m$ und $A^c \in \Sigma_m$ für alle $A \in \Sigma_m$.
b) Seien $A, B \in \Sigma_m$. Wir zeigen, dass $A \cup B \in \Sigma_m$. Sei $Q \subset \Omega$. Dann ist

$$\begin{aligned} m(Q) &= m(Q \cap A) + m(Q \cap A^c) \\ &= m(Q \cap A) + m(Q \cap A^c \cap B) + m(Q \cap A^c \cap B^c) \\ &\geq m((Q \cap A) \cup (Q \cap A^c \cap B)) + m(Q \cap (A \cup B)^c) \\ &= m(Q \cap (A \cup B)) + m(Q \cap (A \cup B)^c) \ . \end{aligned}$$

Somit ist $A \cup B \in \Sigma_m$. Damit haben wir gezeigt, dass Σ_m eine Algebra ist. Um zu zeigen, dass Σ_m eine σ-Algebra ist, reicht also folgendes zu zeigen:
c) Sind $A_k \in \Sigma_m, k \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt, so ist

$$A := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \Sigma_m \ .$$

Sei $Q \subset \Omega$. Indem wir (13.1) auf $Q \cap (A_1 \cup A_2)$ statt auf Q anwenden, sehen wir, dass

$$\begin{aligned} m(Q \cap (A_1 \cup A_2)) &= m((Q \cap (A_1 \cup A_2)) \cap A_1) \\ &+ m((Q \cap (A_1 \cup A_2)) \cap A_2) \\ &= m(Q \cap A_1) + m(Q \cap A_2) \ . \end{aligned}$$

Wiederholtes Anwenden liefert

$$m\left(Q \cap \bigcup_{k=1}^{\ell} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\ell} m(Q \cap A_k)$$

für alle $\ell \in \mathbb{N}$. Damit ist

$$\begin{aligned} m(Q) &= m\left(Q \cap \bigcup_{k=1}^{\ell} A_k\right) + m\left(Q \cap (\bigcup_{k=1}^{\ell} A_k)^c\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\ell} m(Q \cap A_k) + m\left(Q \cap (\bigcup_{k=1}^{\ell} A_k)^c\right) \\ &\geq \sum_{k=1}^{\ell} m(Q \cap A_k) + m(Q \cap A^c) \end{aligned}$$

für alle $\ell \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$m(Q) \geq \sum_{k=1}^{\infty} m(Q \cap A_k) + m(Q \cap A^c) \ .$$

Umgekehrt ist wegen der σ-Subadditivität

$$\begin{aligned} m(Q) &\leq m(Q \cap A) + m(Q \cap A^c) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} m(Q \cap A_k) + m(Q \cap A^c) \\ &\leq m(Q) \ . \end{aligned}$$

Damit ist A messbar und, indem wir $Q = A$ wählen, sehen wir, dass

$$m(A) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)\ .$$

$\square$

Definition 13.4. *1.) Ein Mengensystem $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt **Ring**, falls*

(a) $\emptyset \in \mathcal{R}$

(b) $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B, A \cap B, A \setminus B \in \mathcal{R}$.

2.) Ein Maß auf $\mathcal{R}$ ist eine Abbildung $\mu\colon \mathcal{R} \to [0, \infty]$ derart, dass

(a) $\mu(\emptyset) = 0$;

(b) $A_k \in \mathcal{R}, k \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt $A := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{R} \Rightarrow \mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.

Eine Algebra ist also ein Ring $\mathcal{R}$ derart, dass $\Omega \in \mathcal{R}$. Ist μ ein Maß auf $\mathcal{R}$ so sieht man wie schon bei Maßen auf σ-Algebren, dass

$$A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B) \text{ für alle } A, B \in \mathcal{R} \text{ Monotonie .} \tag{13.3}$$

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \Rightarrow \mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)\ (\sigma - \text{Subadditivität}). \tag{13.4}$$

Satz 13.5. *Sei $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein Ring und sei $\mu\colon \mathcal{R} \to [0, \infty]$ ein Maß. Dann definiert*

$$\mu^*(B) = \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)\colon B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\ , A_k \in \mathcal{R} \right\}$$

ein äußeres Maß und es gilt $\mu^*(A) = \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{R}$. Ferner ist $\mathcal{R} \subset \Sigma_m$.

Beweis. a) Es ist klar, dass $\mu^*(\emptyset) = 0$. Wir zeigen die σ-Subadditivität. Seien $B, B_n \subset \Omega, B \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Es ist zu zeigen, dass

$$\mu^*(B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n)\ .$$

Nehmen wir an, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n) < \infty$ (sonst ist nichts zu zeigen). Sei $\varepsilon > 0$. Nach der Definition von μ^* gibt es $A_{n_k} \in \mathcal{R}$, sodass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{n_k}) \leq \mu^*(B_n) + 2^{-n}\varepsilon \text{ und } B_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n_k}\ .$$

Damit ist $B \subset \bigcup_{n,k} A_{n_k}$ und somit

$$\mu^*(B) \leq \sum_n \sum_k \mu(A_{n_k}) \leq \sum_n (\mu^*(B_n) + 2^{-n}\varepsilon) = \sum_n^\infty \mu^*(B_n) + \varepsilon \ .$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt die Behauptung.
b) Sei $A \in \mathcal{R}$. Dann folgt aus der Definition, dass $\mu^*(A) \leq \mu(A)$ (wähle $A_k = A$). Um die umgekehrte Ungleichung zu zeigen, seien $A_k \in \mathcal{R}$, so dass $A \subset \bigcup_{k=1}^\infty A_k$. Dann ist $A = \bigcup_{k=1}^\infty A_k \cap A$. Da μ ein Maß ist folgt, dass

$$\mu(A) \leq \sum_{k=1}^\infty \mu(A_k \cap A) \leq \sum_{k=1}^\infty \mu(A_k) \ .$$

Damit ist gezeigt, dass $\mu(A) \leq \mu^*(A)$.
c) Sei $A \in \mathcal{R}$. Wir zeigen, dass $A \in \Sigma_m$. Sei $Q \subset \Omega$. Wir wollen zeigen, dass $\mu^*(Q) \geq \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \cap A^c)$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $B_\ell \in \mathcal{R}$, sodass $Q \subset \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} B_\ell$ und $\sum_{\ell=1}^\infty \mu(B_\ell) \leq \mu^*(Q) + \varepsilon$. Damit gilt

$$\begin{aligned} \mu^*(Q \cap A) &+ \mu^*(Q \cap A^c) \leq \\ \mu^*\left(\bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} (B_\ell \cap A)\right) &+ \mu^*\left(\bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} B_\ell \cap A^c\right) \leq \\ \sum_{\ell=1}^\infty (\mu(B_\ell \cap A) &+ \mu(B_\ell \cap A^c)) = \\ \sum_{\ell=1}^\infty \mu(B_\ell) &\leq m(Q) + \varepsilon \ . \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt die Behauptung. □

Wir haben bei dem Beweis von Satz 13.5 nur zwei Eigenschaften von μ gebraucht.

$$\mu(A \,\dot{\cup}\, B) = \mu(A) + \mu(B) \quad (A, B \in \mathcal{R}) \tag{13.5}$$

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) \leq \sum_{k=1}^\infty \mu(A_k) \tag{13.6}$$

falls $A_k \in \mathcal{R}, k \in \mathbb{N}$, sodass $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{R}$. Unsere Voraussetzung war dennoch nicht zu stark, wie die folgende Bemerkung zeigt.

Bemerkung. Sei $\mathcal{R}$ ein Ring und $\mu\colon \mathcal{R} \to [0,\infty]$ eine Abbildung derart, dass

(a) $\mu(\emptyset) = 0$

(b) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ wenn $A, B \in \mathcal{R}, A \cap B = \emptyset$ und

(c) $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$, wenn $A_k \in \mathcal{R}, k \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt sind, sodass $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{R}$.

Dann ist μ ein Maß.

Beweis. Seien $A_k \in \mathcal{R}, k \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt, sodass $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{R}$. Wegen (c) müssen wir nur zeigen, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \leq \mu(A)\ .$$

Aus (b) folgt die Monotonie von μ. Damit ist wegen (a),

$$\mu(A) \geq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Das impliziert die Behauptung. $\square$

14 Das Lebesguemaß

Wir nutzen nun die Resultate aus Abschnitt 13, um das Lebesguemaß, und noch allgemeiner das Lebesgue-Stieltjes-Maß, zu konstuieren.
Sei $\mathcal{E} := \{[a,b)\colon -\infty < a < b < \infty\}$. Mit $\mathcal{R}$ bezeichnen wir die Menge der endlichen disjunkten Vereinigungen von Elementen auf $\mathcal{E}$ und nehmen die leere Menge hinzu.

Lemma 14.1. *$\mathcal{R}$ ist eine Algebra.*

Beweis. a) $\mathcal{E}$ ist $\cap$-stabil.
b) Es ist $A \cup B \in \mathcal{R}$, wenn $A, B \in \mathcal{R}$.
c)Sind $[a,b), [c,d) \in \mathcal{E}$, so ist $[a,b) \setminus [c,d) \in \mathcal{K}$.
d) Sei $B \in \mathcal{R}, B = \bigcup\limits_{k=1}^{n} J_k$ mit paarweise disjunkten $J_k \in \mathcal{E}$. Dann ist $[a,b) \setminus B = \bigcap\limits_{k=1}^{n} ([a,b) \setminus J_k) \in \mathcal{R}$.
e) Sei $A \in \mathcal{R}, A = \bigcup\limits_{k=1}^{n} J_k$ mit mit paarweise disjunkten $J_k \in \mathcal{E}$. Dann ist nach d) für $B \in \mathcal{R}, A \setminus B = \bigcup\limits_{k=1}^{n} J_k \setminus B \in \mathcal{R}$. □

Jedes Element A von $\mathcal{R} \setminus \{\emptyset\}$ lässt sich eindeutig schreiben als

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} [a_k, b_k) \text{ mit } a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots a_{n-1} < b_n \ . \tag{14.1}$$

Wir nennen (14.1) die **Standarddarstellung** von A. Nun wollen wir ein Maß auf $\mathcal{R}$ definieren. Wir wollen nicht nur das Lebesguemaß betrachten, sondern einem Intervall einen allgemeinen „Inhalt“ zuordnen. Dazu geben wir eine monoton wachsende, linksseitig stetige Funktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vor. Hier ist monoton im weiteren Sinne $F(s) \leq F(t)$ für $s < t$ zu verstehen. Nun definieren wir $\mu_F\colon \mathcal{R} \to [0,\infty)$ durch

$$\begin{aligned} \mu_F(\emptyset) &= 0 \\ \mu_F(A) &= \sum_{k=1}^{n} F(b_k) - F(a_k) \ , \end{aligned}$$

wenn A die Standarddarstellung (14.1) hat.

Satz 14.2. *$\mu_F\colon \mathcal{R} \to [0,\infty)$ ist ein Maß.*

Beweis. 1. Es ist unmittelbar klar, dass μ_F endlich additiv ist, d.h. wenn

$$A_k \in \mathcal{R}, k = 1, \cdots, n,$$

paarweise disjunkt sind, dann ist

$$\mu_F\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu_F(A_k) \ .$$

Damit ist μ_F auch monoton.
2. Sei $[a,b) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}[a_k,b_k)$ wobei die $[a_k,b_k)$ paarweise disjunkt sind. Wir zeigen, dass $F(b)-F(a) \le \sum\limits_{k=1}^{\infty} F(b_k)-F(a_k)$. Wir können annehmen, dass $a_1 = a$. Wähle $c \in (a_1,b_1)$ und $0 < \varepsilon < b-c$. Dann ist $[c,b-\varepsilon] \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(a_k,b_k)$. Nach dem Satz von Heine-Borel gibt es $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$[c,b-\varepsilon] \subset \bigcup_{k=1}^{N}[a_k,b_k) \ .$$

Damit ist

$$[a,b-\varepsilon) \subset \bigcup_{k=1}^{N}[a_k,b_k) =: A \ .$$

Wir können annehmen, dass $b_1 \le a_2 < b_2 \le a_3 \cdots$, sonst numerieren wir um. Da μ_F monoton ist, folgt dass

$$\begin{aligned} F(b-\varepsilon) - F(a) &= \mu_F([a,b-\varepsilon)) \le \mu_F(A) \\ &= \sum_{k=1}^{N}(F(b_k) - F(a_k)) \\ &\le \sum_{k=1}^{\infty}(F(b_k) - F(a_k)) \ . \end{aligned}$$

Da F linksseitig stetig ist, folgt die Behauptung.
3. Sei $[a,b) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ mit $A_k \in \mathcal{R}, k \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt. Wir zeigen, dass $\mu_F([a,b)) \le \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_F(A_k)$. Dazu schreiben wir $A_k = \bigcup\limits_{\ell=1}^{n_k} J_{k\ell}$ mit $J_{k\ell} \in \mathcal{E}, \ell = 1, \cdots, n_k$, paarweise disjunkt. Nach 2. ist

$$\mu_F([a,b)) \le \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{n_k} \mu_F(J_{k\ell}) \ .$$

Da $\mu_F(A_k) = \sum\limits_{\ell=1}^{n_k} \mu_F(J_{k\ell})$, folgt die Behauptung.
4. Sei $A \in \mathcal{R}$, sodass $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ mit $A_k \in \mathcal{R}, k \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt. Dann ist

nach 3. $\mu_F(J_\ell) = \mu_F\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} J_\ell \cap A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_F(J_\ell \cap A_k)$. Somit ist

$$\mu_F(A) = \sum_{\ell=1}^{n} \mu_F(J_\ell) \leq \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{n} \mu_F(J_\ell \cap A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_F(A_k) \ .$$

Aus 4. und 1. folgt, dass μ_F ein Maß ist, siehe die Bemerkung nach Definition 13.4. □

Theorem 14.3. *Es gibt genau ein Maß*

$$\lambda_F \colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,\infty] \text{ derart dass } \lambda_F([a,b)) = F(b) - F(a) \text{ für } -\infty < a < b < \infty \ .$$

Beweis. Nach Satz 13.5 ist $\mu_F^* \colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ ein äußeres Maß, sodass $\mu_F^*(A) = \mu_F(A)$ für alle $A \in \mathcal{R}$. Sei Σ_m die Menge der messbaren Mengen bzgl. $m := \mu_F^*$ im Sinne der Definition 13.2. Somit ist Σ_m nach Satz 13.3 eine σ-Algebra und μ_F^* definiert ein Maß auf Σ_m. Da $\mu_F^*([a,b)) = \mu_F([a,b)) = F(b) - F(a)$ haben wir die Existenz bewiesen. Da die Menge $\mathcal{E} := \{[a,b) \colon -\infty < a < b < \infty\}$ $\cap$-stabil ist, folgt die Eindeutigkeit aus Satz 11.8. □

Für $F = id$ mit $id(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ setzen wir $\lambda := \lambda_F$ und nennen λ das **Lebesguemaß**. Damit haben wir also Theorem 2.1 im Fall der Dimension $d = 1$ bewiesen. Der Beweis für $d > 1$ ist völlig analog. Alternativ kann man das Lebesguemaß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ also Produktmaß definieren (vgl. Beispiel 12.3). Ist F monoton wachsend und linksseitig stetig so nennt man λ_F das **Lebesgue-Stieltjes-Maß** bzgl. F. Ist F zusätzlich stetig differenzierbar, so gilt

$$\lambda_F(A) = \int_A F'(t)\,\mathrm{dt} \tag{14.2}$$

für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) d\lambda_F(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)F'(x)\,\mathrm{dx} \tag{14.3}$$

für alle messbaren Funktionen $f \colon \mathbb{R} \to [0,\infty]$.

Beweis von (14.2). Nach Satz 12.2 definiert $\mu(A) := \int_A F'(t)\,\mathrm{dt}$ ein Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung sagt gerade, dass

$$\mu([a,b)) = F(b) - F(a)$$

wenn $-\infty < a < b < \infty$. Damit folgt (14.2) aus der Eindeutigkeit in Theorem 14.3. □

Beweis von (14.3). Die Beziehung (14.2) besagt gerade, dass (14.3) für $f = 1_A, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, gültig ist. Damit gilt (14.3) auch für elementare Funktionen. Sei $f \colon \mathbb{R} \to [0,\infty]$

messbar. Dann gibt es elementare Funktionen $f_n\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ derart, dass $f_n \leq f_{n+1}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit folgt aus dem Satz von Beppo Levi, dass

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}} f(x) d\lambda_F(x) &= \sup_n \int\limits_{\mathbb{R}} f_n(x) d\lambda_F(x) \\
&= \sup_n \int\limits_{\mathbb{R}} f_n(x) F'(x)\,\mathrm{dx} \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) F'(x)\,\mathrm{dx} \ .
\end{aligned}$$

$\square$