Funktionalanalysis

Wolfgang Arendt

Vorlesungsskript

Februar 2006

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Das vorliegende Vorlesungsskript gibt eine Einführung in die Funktionalanalysis. Ziel ist es, die grundlegenden Resultate über Banachräume und Operatoren zu beweisen. Dabei werden nur minimale Grundkenntnisse aus Analysis und linearer Algebra vorausgesetzt. Die topologischen Begriffe werden in Kapitel 1 eingeführt. Im gesamten Skript werden nur metrische Räume benötigt. Von größter Bedeutung ist der Begriff der Kompaktheit, der ausführlich behandelt wird. Auch bei der Behandlung von der schwachen Topologie kommen wir mit Folgenkonvergenz aus.
In Abschnitt 1.7* wird der interessante Satz von Mittag-Leffler bewiesen, der noch nicht in die Lehrbuch-Literatur eingegangen ist. Wie der Stern andeutet, ist dieser Abschnitt jedoch unabhängig vom Rest des Stoffes und gibt lediglich Zusatzinformation.
Im letzten Kapitel wird eine Einführung in die Räume integrierbarer Funktionen gegeben. Diese sind fundamental für alle Anwendungen, ob in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen, der Ökonomie oder der mathematischen Physik. Und solche Anwendungen gibt es in Hülle und Fülle. Wir verweisen auf entsprechende Vorlesungen und die Bücher von Alt [Al], Zeidler [Ze1], [Ze2] und Brezis [Br].

Kapitel 1

Metrische und normierte Räume

In diesem Kapitel werden einige topologische Grundbegriffe eingeführt. Wir beschränken uns auf metrische Räume und setzen etwas Vertrautheit mit den Begriffen Grenzwert, Stetigkeit und topologischen Begriffen wie offen, abgeschlossen voraus. Kompaktheit wird ausführlich diskutiert. Ferner beweisen wir den abstrakten Satz von Mittag-Leffler und den Satz von Baire. Die meisten Beispiele von metrischen Räumen, die wir betrachten, sind Teilräume von normierten Räumen. Daher führen wir diesen Begriff sowie die fundamentale Definition eines Banachraumes in diesem Kapitel ein. Wir bezeichnen mit $\mathbb{N} = \{1\,,\,2\,,\ldots\}$ die natürlichen Zahlen, und setzen $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Mit $\mathbb{K}$ bezeichnen wir den Körper $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$, wenn Aussagen in beiden Fällen gültig sind. Ferner ist

$$\mathbb{R}_+ = [0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \ .$$

1.1 Konvergenz in metrischen Räumen

Den von $\mathbb{R}$ bekannten Abstandsbegriff axiomatisiert man folgendermaßen:

Definition 1.1.1. *Sei M eine Menge. Eine Funktion $d : M \times M \to \mathbb{R}_+$ heißt* **Abstand** *oder* **Metrik***, falls für alle $x\,,\,y\,,\,z \in M$,*

(a) $d(x\,,\,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *;*

(b) $d(x\,,\,y) = d(y\,,\,x)$ **(Symmetrie)***;*

(c) $d(x\,,\,z) \le d(x\,,\,y) + d(y\,,\,z)$ **(Dreiecksungleichung)**.

Man nennt dann (M,d) *einen* **metrischen Raum**. *Oft sprechen wir einfach von einem metrischen Raum* M *und bezeichnen die Metrik durchweg mit* d *.*

Konvergenz definiert man nun folgendermaßen:

Definition 1.1.2. *Sei* M *ein metrischer Raum,* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* M *und* $x \in M$ *. Man sagt,* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert gegen** x *und schreibt* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *oder* $x_n \to x \quad (n \to \infty)$ *, falls für alle* $\varepsilon > 0$ *ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *existiert, so dass* $d(x_n\,,\,x) \le \varepsilon$ *für alle* $n \ge n_0$ *. Man sagt, eine Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* M **konvergiert**, *falls es ein* $x \in M$ *gibt, so dass* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *.*

Bemerkung 1.1.3 (Eindeutigkeit des Limes)**.** *Sei* M *ein metrischer Raum.*

a) Seien $x_n \in M \quad (n \in \mathbb{N})$, und seien $x\,,\,y \in M$. Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$, so ist $x = y$. Das ist einfach zu sehen.

b) Sei $x_n \in M$, $x \in M$. Es gilt genau dann $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n\,,\,x) = 0$ in $\mathbb{R}$.

Beispiel 1.1.4. (a) Sei $M \subset \mathbb{R}$. Dann definiert $d(x\,,\,y) = |x-y|$ die kanonische Metrik auf $\mathbb{R}$.
(b) Auf $\mathbb{C}$ definiert $d(z\,,\,w) = |z-w|$ eine Metrik, wobei $|z|^2 = (\mathrm{Re}z)^2 + (\mathrm{Im}z)^2 = z \cdot \bar{z}$.
(c) Ist d eine Metrik auf M . Dann definiert auch $d_1(x\,,\,y) = \min\{1, d(x,y)\}$ eine Metrik auf M . Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0$ genau dann wenn $\lim\limits_{n\to\infty} d_1(x_n,x)$ für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und alle x in M . Damit erzeugen beide Metriken denselben Konvergenzbegriff. Man beachte, dass $d_1(x\,,\,y) \in [0,1]$ für alle $x\,,\,y \in M$.

Definition 1.1.5. *Seien* (M_1,d_1) , (M_2,d_2) *metrische Räume,* $f : M_1 \to M_2$ *eine Funktion.*

a) Sei $x \in M_1$ *. Dann heißt* f **stetig in** x *falls* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *impliziert dass* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ *für jede Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* M_1 *.*

b) Die Funktion f *heißt* **stetig**, *falls sie in jedem Punkt von* M_1 *stetig ist.*

Eigenschaften 1.1.6. *(a)* ($\varepsilon - \delta$ **-Kriterium)** $f : M_1 \to M_2$ *ist genau dann in* $x \in M_1$ *stetig, wenn gilt:*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \ \text{ so dass } \ d(x,y) \leq \delta \ \text{ impliziert } \ d(f(x)\ ,\ f(y)) \leq \varepsilon\ .$$

(b) Sind (M_j, d_j) , $j = 1,2,3$, *metrische Räume und* $f : M_1 \to M_2$, $g : M_2 \to M_3$ *stetig, so ist* $g \circ f$ *stetig.*

(c) Sei (M,d) *ein metrischer Raum. Dann gilt* $|d(u,v) - d(v,w)| \leq d(u,w)$ *für alle* $u,v,w \in M$ *. Folglich ist* $d : M \times M \to \mathbb{R}_+$ *stetig (d.h.* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ *impliziert, dass* $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x,y)$*)* .

Dies ist einfach zu beweisen.

Die wichtigsten Beispiele von metrischen Räumen sind normierte Räume und ihre Teilmengen. Ist E ein Vektorraum, so betrachtet man Abstände die mit der Vektorraumstruktur verträglich sind:

Definition 1.1.7. *Sei* E *ein Vektorraum über* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$ *. Eine* **Norm** *auf* E *ist eine Abbildung* $\|\ \ \| : E \to \mathbb{R}_+$ *derart, dass für alle* $x\,,\, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$,

(a) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(b) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$

(c) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (x\,,\, y \in E)$.

Man nennt dann $(E, \|\ \ \|)$ *einen* **normierten Vektorraum**.

Sei E ein normierter Vektorraum über $\mathbb{K}$. Dann definiert $d(x,y) = \|x-y\|$ einen Abstand auf E . Wir werden E und Teilmengen von E immer als metrischen Raum bzgl. diesem Abstand betrachten. Eine Teilmenge B von E heißt **beschränkt** falls es ein $c \in \mathbb{R}_+$ gibt, so dass $\|x\| \leq c$ für alle $x \in B$. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E heißt **beschränkt**, falls $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty$.

Eigenschaften 1.1.8. *a) Jede konvergente Folge ist beschränkt.*
b) Falls $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ *in* E *und* $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$ *in* $\mathbb{K}$ *so gilt*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y \ , \ \lim_{n\to\infty} \lambda_n x_n = \lambda x \ ;$$

d.h. die Abbildungen $E\times E \to E$, $(x,y) \mapsto x+y$ *und* $\mathbb{K}\times E \to E$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ *sind stetig.*
c) Es gilt

$$| \, \|x\| - \|y\| \, | \leq \|x - y\| \qquad (x, y \in E) \tag{1.1}$$

d) Insbesondere ist die Abbildung

$$\| \quad \| : E \to \mathbb{R}_+ \ , \ x \mapsto \|x\| \ \textit{stetig} \, .$$

Beweis. a) Sei $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Dann gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $\|x_n - x\| \leq 1$ für alle $n \geq n_0$. Also ist $\|x_n\| \leq \|x_n - x\| + \|x\| \leq 1 + \|x\|$ für $n \geq n_0$.
b) Es gilt $\|(x_n+y_n)-(x+y)\| \leq \|x_n-x\|+\|y_n-y\| \to 0 \quad (n \to \infty)$, $\|\lambda_n x_n - \lambda x\| = \|(\lambda_n-\lambda)x_n+\lambda(x_n-x)\| \leq |\lambda_n-\lambda| \, \|x_n\|+|\lambda| \, \|x_n-x\| \to 0 \quad (n \to \infty)$.
c) Es ist $\|x\| \leq \|x - y\| + \|y\|$, also $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ und genauso $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|$. Also $\pm(\|x\| - \|y\|) \leq \|x - y\|$. Daraus folgt (1.1). □

Beispiel 1.1.9. a) Auf $\mathbb{K}^n$ definieren

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{N} |x_i|$$
$$\|x\|_\infty := \max_{i=1\ldots N} |x_i|$$

Normen. Beide führen zu **komponentenweiser Konvergenz**, d.h. für x^n , $x \in \mathbb{K}^N$ gilt $\lim_{n\to\infty} \|x^n - x\|_1 = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|x^n - x\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_i^n = x_i$ für alle $i \in \{1 \ldots N\}$. Wir werden später sehen, dass alle Normen auf $\mathbb{K}^N$ die komponentenweise Konvergenz beschreiben.

b) Sei Ω eine beliebige Menge. Dann ist $\mathcal{F}^b(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{K} \ \text{beschränkt}\}$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum bezüglich punktweiser Operationen: $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, $(\lambda f)(x) = \lambda f(x) \quad (f \, , \, g \in \mathcal{F}^b(\Omega) \, , \ \lambda \in \mathbb{K} \, , \ x \in \Omega)$. Ferner ist

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in \Omega\}$$

eine Norm auf $\mathcal{F}^b(\Omega)$. Sei f_n , $f \in \mathcal{F}^b(\Omega)$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ genau dann wenn $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **gleichmäßig gegen** f **konvergiert**, d.h. wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ für alle $x \in \Omega$, $n \geq n_0$.

c) Mit ℓ^∞ bezeichnen wir den normierten Vektorraum aller skalaren beschränkten Folgen mit der Norm

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \qquad (x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty) .$$

Das ist ein Spezialfall von b): $\ell^\infty = \mathcal{F}^b(\mathbb{N})$.

1.2 Topologische Begriffe

Im folgenden sei M ein metrischer Raum mit der Metrik d .

Definition 1.2.1. *a) Sei* $x \in M$, $r > 0$ *. Dann heißt* $B(x,r) = \{y \in M : d(x,y) < r\}$ *die* **offene Kugel mit Mittelpunkt** x **und Radius** r *.*
b) Eine Menge $O \subset M$ *heißt* **offen** *falls für alle* $x \in O$ *ein* $r > 0$ *existiert, so dass* $B(x,r) \subset O$ *.*
c) Eine Menge $A \subset M$ *heißt* **abgeschlossen***, falls* $A^c := M \setminus A$ *offen ist.*

Wir stellen Eigenschaften der offenen und abgeschlossenen Mengen zusammen. Zunächst stellen wir fest, dass $B(x,r)$ offen ist für jedes $x \in M$, $r > 0$ (da wegen der Dreiecksungleichung $B(y\,,\,\frac{r}{2}) \subset B(x\,,\,r)$, wenn $y \in B(x\,,\,\frac{r}{2}))$.
Es gilt:

(01) $\emptyset$, M sind offene Mengen;

(02) sind O_1 , $O_2 \subset M$ offen, so ist auch $O_1 \cap O_2$ offen;

(03) ist $O_i \subset M$ offen, $i \in I$, so ist auch $\bigcup\limits_{i\in I} O_i$ offen.

Dies ist unmittelbar klar aus der Definition. Dual dazu ergeben sich folgende Eigenschaften für abgeschlossene Mengen:

(A1) $\emptyset$, M sind abgeschlossen;

(A2) sind A_1 , $A_2 \subset M$ abgeschlossen, so ist auch $A_1 \cup A_2$ abgeschlossen;

(A3) ist $A_i \subset M$ abgeschlossen, $i \in I$, so ist auch $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ abgeschlossen.

Definition und Satz 1.2.2 Sei $A \subset M$.
a) Man nennt $\overset{\circ}{A} := \{x \in M : \exists\, r > 0 \text{ so dass } B(x,r) \subset A\}$ das **Innere von** A . Es ist die größte offene Teilmenge von M , die in A enthalten ist.
b) Man nennt $\bar{A} := \{x \in M : \forall\, \varepsilon > 0 \text{ gilt } B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset\}$ den **Abschluß** von A . Es ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält.
c) Die Menge $\partial A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ heißt der **Rand** von A .
Es gelten folgende Eigenschaften:
d) $\mathcal{C}\bar{A} = (\mathcal{C}A)^\circ$, $\mathcal{C}\,\overset{\circ}{A} = \overline{\mathcal{C}A}$
e) $\bar{A} = \{x \in M : \exists\, x_n \in A \text{ so dass } \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x\}$
f) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$; $(\overset{\circ}{A})^\circ = \overset{\circ}{A}$
g) A ist abgeschlossen genau dann wenn $A = \bar{A}$
h) A ist offen genau dann wenn $A = \overset{\circ}{A}$
i) $\partial A = \partial(\mathcal{C}A)$

Beweis. a) A ist offen als Vereinigung offener Kugeln. Sei $O \subset M$ offen und $O \subset A$. Sei $x \in O$. Dann gibt es $r > O$ so dass $B(x,r) \subset O$. Damit ist $x \in \overset{\circ}{A}$. Also ist $O \subset \overset{\circ}{A}$.
b) Es ist $\mathcal{C}\bar{A} = \{x \in M : \exists\, \varepsilon > 0 \text{ so dass } B(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset\} = (\mathcal{C}A)^\circ$. Damit ist $\bar{A}$ abgeschlossen. Ist B abgeschlossen und $A \subset B$, so gilt $\mathcal{C}B \subset \mathcal{C}A$, und wegen a) folgt $\mathcal{C}B \subset (\mathcal{C}A)^\circ = \mathcal{C}\bar{A}$, also $\bar{A} \subset B$.
d) Die erste Aussage wurde bewiesen. Daraus folgt die zweite durch Komplementärbildung.
e) Sei $x \in \bar{A}$. Dann gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in A$ so dass $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$. Somit gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Ist umgekehrt $x_n \in A$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ und $\varepsilon > 0$, so gibt es $n \in \mathbb{N}$, so dass $d(x_n, x) < \varepsilon$. Also ist $x_n \in A \cap B(x,\varepsilon)$.

Bemerkung 1.2.2 (abgeschlossene Kugeln)**.** Sei E ein normierter Raum und sei $B(x,r) = \{y \in E : \|x-y\| < r\}$ eine offene Kugel. Dann ist $\overline{B(x,r)} = \{y \in E : \|x-y\| \leq r\}$. Wir nennen $\bar{B}(x,r) := \overline{B(x,r)}$ die **abgeschlossene Kugel mit Mittelpunkt** x **und Radius** r . $\square$

Beispiel 1.2.3 (gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen)**.** *Sei* M *ein metrischer Raum. Wir bezeichnen mit* $C^b(M)$ *die Menge aller beschränkten stetigen skalar-wertigen Funktionen auf* M *. Dann ist* $C^b(M)$ *ein abgeschlossener Teilraum von* $\mathcal{F}^b(M)$ *.*

Beweis. Es ist klar, dass $C^b(M)$ ein Untervektorraum von $\mathcal{F}^b(M)$ ist. Wir zeigen, dass $C^b(M)$ abgeschlossen ist. Sei $f \in \overline{C^b(M)}$, wobei der Abschluß in $\mathcal{F}^b(M)$ verstanden wird. Sei $x_0 \in M$, $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $g \in C^b(M)$ so dass $\|f-g\|_\infty \leq \varepsilon/3$, d.h. $|f(x)-g(x)| \leq \varepsilon/3$ für alle $x \in M$. Da g stetig in x_0 ist, gibt es $\delta > 0$, so dass $|g(x)-g(x_0)| \leq \varepsilon/3$ falls $d(x,x_0) \leq \delta$. Damit ist $|f(x)-f(x_0)| \leq |f(x)-g(x)|+|g(x)-g(x_0)|+|g(x_0)-f(x_0)| \leq \varepsilon$ falls $d(x,x_0) \leq \delta$. $\square$

Die Abgeschlossenheit von $C^b(M)$ in $\mathcal{F}^b(M)$ läßt sich wegen Beispiel 1.1.9b) auch folgendermaßen ausdrücken: **Der gleichmäßige Limes stetiger Funktionen ist stetig**.

Ist $x \in M$ so nennt man eine Teilmenge U von M eine **Umgebung** von x , falls sie eine offene Kugel mit Mittelpunkt x enthält. Damit sind die offenen Umgebungen von x gerade die offenen Mengen, die x enthalten, und die Umgebungen von x sind gerade die Obermengen von offenen Umgebungen von x . Ferner ist $O \subset M$ genau dann offen, wenn es zu jedem $x \in O$ eine Umgebung U von x gibt so dass $U \subset O$.

Sei $f : M_1 \to M_2$ eine Funktion, wobei M_1, M_2 metrische Räume sind.

Satz 1.2.4. *a) Sei* $x \in M_1$ *. Dann sind äquivalent:*

(i) f *ist stetig in* x *;*

(ii) $f^{-1}(V)$ *ist eine Umgebung von* x *für jede Umgebung* V *von* $f(x)$ *.*

b) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) f *ist stetig;*

(ii) $f^{-1}(O)$ *ist offen in* M_1 *für jede offene Teilmenge* O *von* M_2 *.*

Beweis. a) folgt unmittelbar aus dem $\varepsilon - \delta$ - Kriterium 1.1.6 (a). Aussage b) folgt unmittelbar aus a). □

Eine Abbildung $f : M_1 \to M_2$ heißt **Homöomorphismus** falls f stetig und bijektiv ist und auch die Umkehrabbildung f^{-1} stetig ist.

Korollar 1.2.5. *Seien d_1 und d_2 zwei Abstände auf der Menge M . Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) Eine Teilmenge O von M ist genau dann bzgl. d_1 offen, wenn sie bzgl. d_2 offen ist.

(ii) Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M und jedes $x \in M$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} d_1(x_n, x) = 0$ genau dann wenn $\lim\limits_{n\to\infty} d_2(x_n, x) = 0$.

Beweis. Man wende Satz 1.2.4 auf die identische Abbildung an. □

Das Korollar besagt, dass die Menge aller offenen Mengen in einem metrischen Raum eindeutig den Konvergenzbegriff festlegt. Man sagt, dass zwei Metriken **äquivalent** sind, wenn die äquivalenten Aussagen von Korollar 1.2.5 gelten.

Bemerkung 1.2.6 (relative Topologie)**.** Sei $A \subset M$. Dann definiert die Einschränkung d_A von d auf $A \times A$ einen Abstand auf A . a) Wir sagen, eine Teilmenge B von A ist **relativ offen** in A wenn B bzgl. d_A offen ist. Man sieht leicht, dass B genau dann relativ offen in A ist, wenn es eine offene Teilmenge O von M gibt, so dass $B = A \cap O$. Wenn insbesondere A offen in M ist, so sind die Begriffe "offen" und "relativ offen in A " äquivalent.
b) Genauso sagen wir, dass $B \subset A$ **relativ abgeschlossen in** A ist, falls B bzgl. d_A sbgeschlossen ist. Das bedeutet folgendes: Ist $x \in A$, $x_n \in B$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, so ist $x \in B$. Wieder fallen beide Begriffe von Abgeschlossenheit zusammen, wenn A abgeschlossen ist.
c) Sei $M = \mathbb{R}$, $A = (0, 1]$. Dann ist $(\frac{1}{2}, 1]$ relativ offen in A und $(0, \frac{1}{2}]$ ist relativ abgeschlossen in A .

Satz 1.2.7 (Abstandsfunktion)**.** *Sei M ein metrischer Raum und $A \subset M$. Für $x \in M$ setzen wir*

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\} \ .$$

Dann ist

$$|d(x,A) - d(y,A)| \le d(x,y) \tag{1.2}$$

für alle $x, y \in M$. *Insbesondere ist die Funktion* $x \mapsto d(x, A) : M \to \mathbb{R}_+$ *stetig.*

Beweis. Seien $x, y \in M$. Sei $a \in A$. Dann ist $d(x,A) \le d(x,a) \le d(x,y) + d(y,a)$. Damit folgt $d(x,A) \le d(x,y) + \inf_{a\in A} d(y,a) = d(x,y) + d(y,A)$. Wir haben gezeigt, dass $d(x,A) - d(y,A) \le d(x,y)$. Vertauschen von x und y liefert (1.1). □

Es folgt aus Satz 1.2.2., dass $d(x,A) = 0$ genau dann wenn $x \in \bar{A}$. Eine Teilmenge D von M heißt **dicht**, falls $\bar{D} = M$.

Definition 1.2.8. *Ein metrischer Raum* M *heißt* **separabel**, *falls er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.*

Zum Beispiel ist $\mathbb{R}$ separabel, dass $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist. Aus dem gleichen Grund ist $\mathbb{C}$ separabel und auch $(\mathbb{K}^N, \| \quad \|_\infty)$.

Satz 1.2.9. *Sei* (M, d) *ein separabler metrischer Raum,* $A \subset M$. *Dann ist auch* A *mit der induzierten Metrik separabel.*

Beweis. Sei $\{m_1, m_2, \ldots\}$ dicht in M . Wähle $a_{kn} \in A$ so dass $d(m_k, a_{kn}) \le d(m_k, A) + 1/n \quad (k, n \in \mathbb{N})$. Sei $x \in A$, $\varepsilon > 0$. Es gibt $k \in \mathbb{N}$ so dass $d(x, m_k) \le \varepsilon/3$. Sei $n \in \mathbb{N}$ so dass $1/n \le \varepsilon/3$. Dann ist $d(x, a_{kn}) \le d(x, m_k) + d(m_k, a_{kn}) \le \varepsilon/3 + d(m_k, A) + 1/n \le \varepsilon/3 + d(m_k, x) + \varepsilon/3 \le \varepsilon$, da $x \in A$. Wir haben gezeigt, dass die Menge $\{a_{kn} : k, n \in \mathbb{N}\}$ dicht in A ist. □

Bemerkung 1.2.10. Sei E ein normierter Vektorraum über $\mathbb{K}$. Ist $A \subset E$, so bezeichnen wir mit

$$lin\ A = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i : n \in \mathbb{N}, a_1, \ldots a_n \in A\ ,\ \lambda_1, \ldots \lambda_n \in \mathbb{K}\} \tag{1.3}$$

die lineare Hülle von A und mit $\overline{lin}\, A$ ihren Abschluß. Somit ist E genau dann separabel, wenn es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E gibt, derart dass $\overline{lin}\,\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = E$.

Beispiel 1.2.11. *Sei* Ω *eine nicht-endliche Menge. Dann ist* $(\mathcal{F}^b(\Omega)\, , \|\ \|_\infty)$ *nicht separabel. Insbesondere ist* $(\ell^\infty, \|\ \|_\infty)$ *nicht separabel.*

Beweis. Die Potenzmenge $\mathcal{P} := \mathcal{P}(\Omega)$ von Ω ist nicht abzählbar. Jedem $A \in \mathcal{P}$ ordnen wir die characteristische Funktion $1_A \in \mathcal{F}^b(\Omega)$ von A zu; d.h.

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn} \quad x \in A \\ 0 & \text{wenn} \quad x \notin A\,. \end{cases} \tag{1.4}$$

Dann ist $\|1_A - 1_B\|_\infty = 1$ wenn $A \neq B$. Sei F eine dichte Teilmenge von $\mathcal{F}^b(\Omega)$. Zu $A \in \mathcal{P}$ gibt es dann $f_A \in F$ mit $\|1_A - f_A\| < \frac{1}{2}$. Für $A, B \in \mathcal{P}$, $A \neq B$ ist dann $\|f_A - f_B\| = \|1_A - 1_B - \{(1_A - f_A) + (f_B - 1_A)\}\| \geq \|1_A - 1_B\| - \|(1_A - f_A) + (f_B - 1_B)\| \geq 1 - \|1_A - f_A\| - \|1_B - f_B\| > 0$. Damit ist die Abbildung $A \mapsto f_A$ von $\mathcal{P}$ nach F injektiv. Somit ist F überabzählbar. $\square$

1.3 Vollständige metrische Räume

Sei (M, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **Cauchyfolge**, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0$. Man sieht leicht, dass jede konvergente Folge eine Cauchyfolge ist.

Definition 1.3.1. *Ein metrischer Raum* M *heißt* **vollständig**, *falls jede Cauchyfolge in* M *konvergiert. Ein* **Banachraum** *ist ein vollständiger normierter Vektorraum.*

Der Begriff des Banachraumes wurde in den zwanziger Jahren geprägt und hat sich als fundamental für die gesamte Analysis herausgestellt. Stefan Banach (1892 - 1945) war ein polnischer Mathematiker, der entscheidend an der Entstehung der Funktionalanalysis mitgewirkt hat.

Die meisten interessanten vollständigen metrischen Räume treten als abgeschlossene Teilmengen eines Banachraumes auf. Dazu beachte man folgende offensichtliche Aussage:

Lemma 1.3.2. *Eine Teilmenge A eines vollständigen metrischen Raumes ist genau dann vollständig, wenn sie abgeschlossen ist.*

Auch das folgende Lemma ist of nützlich um Vollständigkeit zu beweisen. Wir überlassen den einfachen Beweis dem Leser.

Lemma 1.3.3. *Eine Cauchyfolge konvergiert genau dann, wenn sie eine konvergente Teilfolge besitzt.*

Bevor wir einige Beispiele von Banachräumen zusammenstellen, führen wir spezielle Eigenschaften von Cauchyfolgen in normierten Vektorräumen auf.

Sei E ein normierter Vektorraum. Wie bei skalaren Folgen sieht man, dass jede Cauchyfolge beschränkt ist. Da E ein Vektorraum ist, können wir auch Reihen betrachten. Sei $x_n \in E \quad (n \in \mathbb{N})$. Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ heißt **konvergent gegen** $x \in E$, falls

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k = x \ .$$

In dem Fall schreibt man auch

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k := x$$

für den Limes.

Anmerkung: Das Symbol $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ bezeichnet also zwei verschiedene Dinge: Zum einen die Reihe, d.h. die Folge der Partialsummen $(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k)_{n\in\mathbb{N}}$, und zum anderen deren Limes.

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ heißt **absolut konvergent** falls

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty \ . \tag{1.5}$$

Satz 1.3.4. *Ein normierter Vektorraum ist genau dann vollständig, wenn jede absolut konvergente Reihe konvergent ist.*

Beweis. a) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Durch Induktion findet man $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton, so dass für alle $k \in \mathbb{N}$,

$$\|x_n - x_m\| \leq 2^{-k} \quad (n, m \geq \varphi(k)) \ .$$

Insbesondere ist $(x_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{\varphi(k+1)} - x_{\varphi(k)}\| < \infty \ .$$

Existiert nun $y = \sum_{k=1}^{\infty} (x_{\varphi(k+1)} - x_{\varphi(k)})$, so existiert auch $\lim_{k\to\infty} x_{\varphi(k)} = \lim_{n\to\infty} \{x_{\varphi(1)} + \sum_{k=1}^{n} (x_{\varphi(k+1)} - x_{\varphi(k)})\}$. Damit ist auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent (Lemma 1.3.3).
b) Aus (1.5) folgt, dass $(\sum_{k=1}^{n} x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge bildet. Daraus ergibt sich die umgekehrte Implikation. □

Nun geben wir einige Beispiele von Banachräumen.

Beispiel 1.3.5. *Sei Ω eine Menge. Dann ist $\mathcal{F}^b(\Omega)$ ein Banachraum bzgl. der Supremumsnorm $\| \|_\infty$ (vgl. Beispiel 1.1.9 b).*

Beweis. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{F}^b(\Omega)$. Für $x \in \Omega$ ist $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$. Damit ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{K}$ und $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ konvergiert. Wir zeigen, dass $f : \Omega \to \mathbb{K}$ beschränkt ist, und dass $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in $\mathcal{F}^b(\Omega)$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0$ und alle $x \in \Omega$. Übergang zum Limes mit $m \to \infty$ liefert

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \qquad \forall\, n \geq n_0\,,\, x \in \Omega\,. \tag{1.6}$$

Insbesondere ist also $|f(x)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x)| \leq \varepsilon + \|f_{n_0}\|_\infty$ für alle $x \in \Omega$. Somit ist f_{n_0} beschränkt. Nun zeigt (3.2), dass $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, haben wir gezeigt, dass $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in $\mathcal{F}^b(\Omega)$. □

Beispiel 1.3.6. *Sei M ein metrischer Raum. Dann ist $C^b(M) := \{f : M \to \mathbb{K} :$ stetig beschränkt$\}$ ein Banachraum bzgl. der Supremumsnorm $\| \; \|_\infty$.*

Beweis. Wir haben in Beispiel 1.2.3 gesehen, dass $C^b(M)$ ein abgeschlossener Teilraum von $C^b(M)$ ist. Damit folgt die Behauptung aus Lemma 1.3.2. □

Insbesondere ist der Raum $C[a, b]$ aller stetigen skalarwertigen Funktionen auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ bzgl. der Supremumsnorm ein Banachraum. Es handelt sich um ein wichtiges Beispiel.

Beispiel 1.3.7 (Folgenräume)**.** *a) Der Raum $(\ell^\infty, \| \; \|_\infty)$ ist ein Banachraum. Das ist ein Spezialfall von Beispiel 1.3.5.*
b) Sei $c := \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty : \lim_{n\to\infty} x_n$ existiert$\}$, $c_0 := \{x \in \ell^\infty : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$. Dann sind c und c_0 abgeschlossene Unterräume von ℓ^∞ und damit Banachräume.
c) Sei $\ell^1 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K} : \sum_{n\to 0}^{\infty} |x_n| < \infty\}$. Dann ist ℓ^1 ein Banachraum bzgl. der Norm

$$\|x\|_1 := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|\,.$$

d) Die Räume c, c_0, ℓ^1 sind separabel; wir hatten gesehen, dass ℓ^∞ nicht separabel ist.

Der Nachweis von b) - d) sei dem Leser überlassen.

Zwei Normen $\| \|_1$ und $\| \|_2$ heißen **äquivalent**, falls es $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ gibt derart, dass

$$\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1 \tag{1.7}$$

für alle $x \in E$. Aus (3.3) folgt unmittelbar, dass eine Folge genau dann bzgl. $\| \|_1$ konvergiert, wenn sie bzgl. $\| \|_2$ konvergiert mit gleichem Grenzwert. Die Cauchy-Eigenschaft bzgl. beider Normen ist ebenso äquivalent. Insbesondere ist $(E, \| \|_1)$ genau dann vollständig, wenn es $(E, \| \|_2)$ ist.

In den folgenden zwei Aufgaben werden weitere interessante Beispiele von Banachräumen vorgestellt.

Aufgabe 1.3.8 (Lipschitz stetige Funktionen)**.** *Sei (M, d) ein metrischer Raum. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{K}$ heißt* **Lipschitz-stetig***, falls es ein $L \geq 0$ gibt derart, dass*

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot d(x, y) \quad (x, y \in M) \, . \tag{1.8}$$

Sei $Lip\ (M) := \{f : M \to \mathbb{K}\ Lipschitz\text{-}stetig\}$. Sei $a \in M$. Für $f \in Lip\ (M)$ setzen wir $L(f) = \inf\{L > 0 :$ (1.4) gilt$\}$ und

$$\|f\|_{Lip(a)} := L(f) + |f(a)| \, .$$

Dann gilt:

- *(a) $|f(x) - f(y)| \leq L(f) \cdot d(x, y)$ und somit $|f(x)| \leq L(f) d(x, a) + |f(a)|$ für alle $f \in Lip\ (M)$, $x, y \in M$.*
- *(b) $(Lip\ (M)\, , \| \|_{Lip(a)})$ ist ein Banachraum,*
- *(c) wenn $a, b \in M$, dann sind $\| \|_{Lip(a)}$ und $\| \|_{Lip(b)}$ äquivalente Normen auf $Lip\ (M)$.*

Aufgabe 1.3.9 (Differenzierbare Funktionen)**.** *Sei $-\infty < a < b < \infty$, $C^1[a, b] := \{f : [a, b] \to \mathbb{R} : f$ ist stetig differenzierbar$\}$.*

- *a) Zeige: $C^1[a, b]$ ist ein Untervektorraum von $Lip\ ([a, b])$ und $L(f) = \|f'\|_\infty$ für alle $f \in C^1[a, b]$.*
- *(b) $C^1[a, b]$ ist abgeschlossen in $(Lip\ ([a, b])\, , \| \|_{Lip(a)})$ und damit ein Banachraum.*
- *(c) Sei $\|f\|_{C^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Dann ist $\|f\|_{C^1}$ eine zu $\| \|_{Lip(a)}$ äquivalente Norm.*
- *(d) $(C^1[a, b], \| \|_{C^1})$ ein Banachraum.*

Aufgabe 1.3.10. *Sei* (M,d) *ein vollständiger metrischer Raum und* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* M *. Es gebe* $\varepsilon_n > 0$ *derart, dass* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$ *und* $d(x_{n+1}, x_n) \le \varepsilon_n$ *. Zeige: Die Folge konvergiert.*

Aufgabe 1.3.11 (Hölder stetige Funktionen)**.** *Sei* $0 < \alpha < 1$ *und sei* (M,d) *ein metrischer Raum. Eine Funktion* $f : M \to \mathbb{C}$ *heißt Hölder stetig mit Index* α *, falls*

$$\|f\|_\alpha := \sup_{\substack{s\neq t \\ s,t\in M}} \frac{|f(t)-f(s)|}{d(t,s)^\alpha} < \infty \ .$$

Sei $C^\alpha(M) := \{f : M \to \mathbb{C} : \|f\|_\alpha < \infty\}$ *. Wähle* $a \in M$ *.*

a) Zeige: $\|f\| := |f(a)| + \|f\|_\alpha$ *definiert eine Norm auf* $C^\alpha(M)$ *.*

b) Zeige: $C^\alpha(M)$ *ist vollständig bzgl. dieser Norm.*

c) Zeige, dass eine andere Wahl des Punktes $a \in M$ *zu einer äquivalenten Norm führt.*

Bemerkung 1.3.12. *Für* $\alpha = 1$ *erhalten wir den Raum* Lip (M) *aus Aufgabe 1.3.8*

1.4 Der Banachsche Fixpunktsatz

Sei (M,d) ein vollständiger metrischer Raum und $T : M \to M$ eine Abbildung. Wir schreiben $Tx = T(x) \quad (x \in M)$. Die Iteration von T sind durch

$$\begin{aligned} T^1 \quad &= \quad T \\ T^{n+1} \quad &:= \quad T \circ T^n \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

definiert, wobei $\circ$ die Verknüpfung von Abbildungen bezeichnet. Wir formulieren eine allgemeine Version des Banachschen Fixpunktsatzes im folgenden Theorem. Sie ist nützlich für Anwendungen wie etwa den Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Differentialgleichungen (Satz 1.4.3).

Theorem 1.4.1. *Sei* (M,d) *ein vollständiger metrischer Raum und* $T : M \to M$ *eine Abbildung derart dass*

$$d(T^n x, T^n y) \le q_n d(x,y) \tag{1.9}$$

für alle $x, y \in M$ *und* $n \in \mathbb{N}$ *wobei* $q_n \ge 0$ *so dass* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n < \infty$ *. Dann gibt es genau ein* $x^* \in M$ *, so dass* $Tx^* = x^*$ *.*

Beweis. Sei $x_0 \in M$ beliebig. Wir setzen $x_n = T^n x_0$. Dann ist

$$d(x_n, x_{n-1}) = d(T^{n-1}Tx_0, T^{n-1}x_0) \le q_{n-1} d(Tx_0, x_0)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit gilt für $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} d(x_{n+m}, x_n) &\le d(x_{n+m}, x_{n+m-1}) + d(x_{n+m-1}, x_{n+m-2}) + \ldots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\le (q_{n+m-1} + q_{n+m-2} + \ldots + q_n) d(Tx_0, x_0) \\ &\le (\sum_{k=n}^{\infty} q_n) d(Tx_0, x_0) \ . \end{aligned}$$

Damit ist $(x_n)_{x \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Sei $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n$. Die Ungleichung (1.9) für $n = 1$ zeigt, dass T stetig ist. Also ist $Tx^* = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x^*$. Bleibt die Eindeutigkeit zu zeigen. Sei $y \in M$, so dass $Ty = y$. Dann ist $T^n y = y$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Folglich gilt $d(x^*, y) \le d(T^n x^*, T^n y) \le q_n d(x^*, y)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist $d(x^*, y) = 0$, d.h. $x^* = y$. □

Wir notieren aus dem Beweis von Theorem 1.4.1, dass für beliebiges $x_0 \in M$, die Iteration

$$x_{n+1} := Tx_n \quad (n \in \mathbb{N}_0) \tag{1.10}$$

eine Folge liefert mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$.

Korollar 1.4.2 (Banachscher Fixpunktsatz)**.** *Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum und $T : M \to M$ eine* **strikt kontraktive** *Abbildung, d.h. es gibt $0 \le q < 1$ derart dass*

$$d(Tx, Ty) \le q d(x, y) \tag{1.11}$$

für alle $x, y \in M$. Dann gibt es genau ein $x^* \in M$ so dass $Tx^* = x^*$.

Beweis. Aus (1.11) folgt, dass $d(T^n x, T^n y) \le q^n d(x, y)$ für alle $x, y \in M, n \in \mathbb{N}$. □

Wir zeigen nun, wie man mit Hilfe von Theorem 1.4.1 den globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Differentialgleichungen beweisen kann.
Sei $\tau > 0$ und sei $f : [0, \tau] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Es gebe $L \ge 0$, so dass

$$|f(t, x) - f(t, y)| \le L|x - y| \tag{1.12}$$

für alle $t \in [0, \tau], x, y \in \mathbb{R}$.

Satz 1.4.3 (Existenz- und Eindeutigkeitssatz)**.** *Zu jedem Anfangswert* $u_0 \in \mathbb{R}$ *gibt es genau eine stetig differenzierbare Funktion* $u : [0,\tau] \to \mathbb{R}$ *, so dass*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u' & = & f(t,u(t)) \quad (t \in [0,\tau]) \\ u(0) & = & u_0 \ . \end{array} \right. \tag{1.13}$$

Beweis. Durch

$$(Tu)(t) = u_0 + \int_0^t f(s,u(s))ds$$

wird eine Abbildung $T : C[a,b] \to C[a,b]$ definiert. Wir zeigen durch Induktion, dass

$$|(T^n u)(t) - (T^n v)(t)| \le \frac{L^n}{n!} t^n \|u-v\|_\infty \ , \tag{1.14}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $n = 1$ gilt,

$$\begin{array}{rcl} |(Tu)(t) - (Tv)(t)| & = & |\displaystyle\int_0^t (f(s,u(s)) - f(s,v(s)))ds| \\ & \le & \displaystyle\int_0^t |f(s,u(s)) - f(s,v(s))|ds \\ & \le & L\displaystyle\int_0^t |u(s)-v(s)|ds \\ & \le & Lt\|u-v\|_\infty \ . \end{array}$$

Nehmen wir an, dass (1.14) für n gilt. Dann ist

$$\begin{array}{rcl} |T^{n+1}u(t) - T^{n+1}v(t)| & = & |\displaystyle\int_0^t [f(s,(T^n u)(s)) - (f(s,(T^n v)(s)]ds| \\ & \le & L\displaystyle\int_0^t |(T^n u)(s) - (T^n v)(s)|ds \\ & \le & L \cdot \dfrac{L^n}{n!}\displaystyle\int_0^t s^n ds = \dfrac{L^{n+1}}{(n+1)!} t^{n+1} \ . \end{array}$$

Damit ist (1.14) bewiesen. Für $t = \tau$ erhalten wir

$$\|T^n u - T^n v\|_\infty \le \frac{L^n \tau^n}{n!} \|u-v\|_\infty$$

für alle $u, v \in C[0,\tau]$. Nach Theorem 1.4.1 gibt es also ein eindeutig bestimmtes $u \in C[0,\tau]$ so dass $Tu = u$. Damit ist

$$u(t) = u_0 + \int_0^t f(s, u(s))ds \tag{1.15}$$

für alle $t \in [0,\tau]$ und u ist eine Lösung von (1.13).
Wir haben die Existenz einer Lösung nachgewiesen. Ist umgekehrt u eine Lösung von (1.13) so folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, dass $Tu = u$. Damit ergibt sich die Eindeutigkeit aus Satz 1.4.1. □

1.5 Kompakte metrische Räume

Ein metrischer Raum M heißt **kompakt**, falls jede Folge in M eine konvergente Teilfolge besitzt. Wir wollen verschiedene Kriterien für Kompaktheit herleiten. Zunächst überlegen wir uns verschiedene Möglichkeiten, Teilfolgen zu beschreiben.

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M . Sei $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton wachsend. Dann heißt $(x_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine **Teilfolge** von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Oft schreibt man auch $n_k = \varphi(k)$, so dass die Folge $(x_{n_k)_{k\in\mathbb{N}}}$ heißt.

Folgende andere Schreibweise ist oft nützlich. Sei J eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$. Sei $\varphi(k)$ das k te Element von J . Dann ist $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton wachsend. Wir setzen

$$(x_n)_{n\in J} := (x_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}} \ .$$

Dann ist folgende Aussage unmittelbar klar.
Seien I, J zwei unendliche Teilmengen von $\mathbb{N}$ und $(x_n)_{n\in I}$ konvergiere gegen $a \in M$. Ist $J \setminus I$ endlich, so konvergiert auch $(x_n)_{n\in J}$ gegen a .

Ein Punkt $x \in M$ heißt **Häufungspunkt** von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $m > n$ existiert so dass $x_m \in B(x,\varepsilon)$. Man sieht unmittelbar, dass x genau dann ein Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, wenn es eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gibt, die gegen x konvergiert. Damit ist M also genau dann kompakt, wenn jede Folge einen Häufungspunkt besitzt.

Wir wollen nun Kompaktheit durch andere Eigenschaften beschreiben. Dazu bemerken wir zunächst folgendes.

Satz 1.5.1. *Jeder kompakte metrische Raum ist vollständig.*

Das folgt unmittelbar aus Lemma 1.3.3.

Man nennt einen metrischen Raum M **präkompakt**, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele Punkte $x_1, \ldots, x_n \in M$ existieren, so dass

$$M = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon) \, .$$

Theorem 1.5.2. *Ein metrischer Raum ist genau dann kompakt, wenn er vollständig und präkompakt ist.*

Beweis. “ $\Rightarrow$” Sei M ein kompakter metrischer Raum. Nach Satz 1.5.1 ist M vollständig. Nehmen wir an, dass M nicht präkompakt ist. Dann gibt es $\varepsilon > 0$, so dass M nicht durch endlich viele ε-Kugeln überdeckt werden kann. Per Induktion finden wir $y_k \in M$, so dass $y_{k+1} \notin \bigcup\limits_{k=1}^{k} B(y_k, \varepsilon)$. Sei y ein Häufungspunkt von $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ so dass $d(y, y_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ und es gilt $k > n$, so dass $d(y, y_k) < \frac{\varepsilon}{2}$. Damit ist nach Konstruktion der Folge $\varepsilon \leq d(y_n, y_k) \leq d(y_n, y) + d(y, y_k) < \varepsilon$, ein Widerspruch.
“ $\Leftarrow$” Sei M vollständig und präkompakt. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M . Da M präkompakt ist, finden wir zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $y \in M$, so dass unendlich viele Folgenglieder in $B(y, \varepsilon)$ liegen. Wir finden also induktiv für $p \in \mathbb{N}$, $y_p \in M$ und unendliche Mengen $J_p \subset \mathbb{N}$ so dass $J_{p+1} \subset J_p$ und $x_n \in B(y_p\, , \frac{1}{p})$ für alle $n \in J_p$. Für $p \in \mathbb{N}$ definiere $\varphi(p)$ als das p-te Element von J_p . Dann ist $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton wachsend und $\varphi(m) \in J_p$ für alle $m \geq p$. Somit ist für $n, m \geq p$, $d(x_{\varphi(m)}\, , x_{\varphi(n)}) \leq d(x_{\varphi(m)}\, , y_p) + d(y_p\, , x_{\varphi(n)}) \leq \frac{2}{p}$. Damit ist $(x_{\varphi(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. □

Eine Teilmenge K von M heißt **kompakt**, wenn K bzgl. der induzierten Metrik kompakt ist; d.h., wenn jede Folge in K eine Teilfolge besitzt, die gegen einen Grenzwert in K konvergiert. Eine Teilmenge B von M heißt **relativ kompakt**, wenn $\bar{B}$ kompakt ist.

Aufgabe 1.5.3. *Zeige* $B \subset M$ *ist genau dann relativ kompakt, wenn jede Folge in* B *eine in* M *konvergente Teilfolge besitzt.*

Ist M ein vollständiger metrischer Raum, so ist nach Theorem 1.5.2 eine Teilmenge B von M genau dann relativ kompakt, wenn $\bar{B}$ präkompakt ist. Man sieht leicht, dass dies genau dann der Fall ist, wenn B selbst präkompakt ist.

Für Teilmengen vollständiger metrischer Räume sind also die Begriffe "präkompakt" und "relativ kompakt" äquivalent.

Schließlich geben wir eine weitere Äquivalenz von Kompaktheit, die man im übrigen in allgemeinen Topologischen Räumen als Definition benutzt:

Satz 1.5.4. *Sei* (M,d) *ein metrischer Raum,* $K \subset M$ *. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) K *ist kompakt.*

(ii) Sei $\{O_i : i \in I\}$ *eine Familie von offenen Mengen, so dass* $K \subset \bigcup\limits_{i \in I} O_i$ *. Dann gibt es* $i_1, \ldots i_n \in I$ *so dass* $K \subset \bigcup\limits_{m=1}^{n} O_{i_m}$ *.*

Man drückt (ii) sprachlich so aus: Jede offene Überdeckung von K besitzt eine endliche Teilüberdeckung. Manchmal bezeichnet man (ii) auch als die **Heine - Borel Eigenschaft**.

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$. Sei K kompakt. Sei $K \subset \bigcup_{i \in I} O_i$, wobei $O_i \subset M$ offen ist.
a) Wir zeigen: Es gibt $\varepsilon > 0$, so dass es für jedes $x \in K$ ein $i \in I$ gibt derart, dass $B(x,\varepsilon) \subset O_i$. Andernfalls fänden wir nämlich $x_n \in K$, so dass $B(x_n, 1/n) \not\subset O_i$ für alle $i \in I$ $(n \in \mathbb{N})$. Sei x ein Häufungspunkt von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dann gibt es $i_0 \in I$ so dass $x \in O_{i_0}$. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ so dass $B(x, 2/n) \subset O_{i_0}$. Wähle $m \geq n$ so dass $d(x_m, x) \leq 1/n$. Dann ist $B(x_m, 1/m) \subset B(x_m, 1/n) \subset B(x, 2/n) \subset O_{i_0}$ im Widerspruch zur Konstruktion von x_m .
b) Da K präkompakt ist, gibt es $y_1, \ldots, y_m \in K$ derart, dass $K \subset$

$\bigcup_{j=1}^{m} B(y_j, \varepsilon)$. Nach a) gibt es zu jedem $j \in \{1 \dots m\}$ ein $i_j \in I$, so dass $B(y_j, \varepsilon) \subset O_{i_j}$. Wir haben gezeigt, dass $K \subset \bigcup_{j=1}^{m} O_{i_j}$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K . Angenommen, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat keinen Häufungspunkt. Dann gibt es für alle $y \in M$ ein $\varepsilon_y > 0$, so dass $B(y, \varepsilon_y)$ nur endlich viele Folgenglieder enthält. Nach Voraussetzung gibt es $y_1 \dots y_m \in K$ so dass $K \subset \bigcup_{j=1}^{m} B(y_j, \varepsilon_{y_j})$. Damit hat die Folge nur endlich viele Folgenglieder, was absurd ist. □

Im Folgenden stellen wir einige Eigenschaften kompakter metrischer Räume zusammen.

Satz 1.5.5. *Jeder kompakte metrische Raum M ist separabel.*

Beweis. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es $x_1^n, \dots x_{m_n}^n \in K$ so dass $M = \bigcup_{j=1}^{m_n} B(x_j^n\,, 1/n)$. Damit ist die Menge $D = \{x_j^n : n \in \mathbb{N},\ j = 1, \dots m_n\}$ dicht in M . □

Satz 1.5.6. *Seien (M_1, d_1), (M_2, d_2) metrische Räume und sei $f : M_1 \to M_2$ stetig. Ist M_1 kompakt, so ist $f(M_1)$ kompakt.*

Das folgt unmittelbar aus der Definition. Aus der Analysis wissen wir:

Satz 1.5.7. *Eine Teilmenge B von $\mathbb{K}^N$ ist kompakt genau dann wenn B abgeschlossen und beschränkt ist.*

Ist $B \subset \mathbb{R}$ kompakt, so hat also B ein größtes und kleinstes Element. Damit erhalten wir aus Satz 1.5.7 folgende wichtige Eigenschaft stetiger Funktionen auf einem Kompaktum.

Korollar 1.5.8. *Sei K ein kompakter metrischer Raum und sei $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es $a, b \in K$ so dass*

$$f(b) \le f(x) \le f(a)$$

für alle $x \in K$.

Das Korollar besagt also, dass f beschränkt ist und sowohl ein Minimum wie auch ein Maximum besitzt.
Sei M ein metrischer Raum und seien $A, B \subset M$. Mit

$$\begin{aligned} d(A,B) &:= \inf\{d(x,y) : x \in A \ , \ y \in B\} \\ &= \inf\{d(x,B) : x \in A\} \end{aligned}$$

bezeichnen wir den **Abstand** zwischen A und B .

Korollar 1.5.9. *Sei (M,d) ein metrischer Raum und sei $A \subset M$ kompakt, $B \subset M$ abgeschlossen. Sind A und B disjunkt, so gilt $d(A,B) > 0$.*

Beweis. Nach Satz 1.2.7 ist die Funktion $x \mapsto d(x,B) : A \to \mathbb{R}_+$ stetig. Da B abgeschlossen ist, ist $d(x,B) > 0$ für alle $x \in A$. Damit folgt aus Korollar 1.5.9, dass $d(A,B) = \inf\limits_{x \in A} d(x,B) > 0$. □

Aufgabe 1.5.10 (Dominierte Konvergenz)**.** *Sei $E = \ell^1$ oder c_0 . Sei $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ und sei $x^k = (x_n^k)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ derart, dass*

$$|x_n^k| \leq a_k \quad \textit{für alle} \quad n,k \in \mathbb{N} \ .$$

Es existiere $x_n = \lim\limits_{k \to \infty} x_n^k$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige: $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ und $\lim\limits_{k \to \infty} x^k = x$ in E .

Aufgabe 1.5.11. *Sei $E = \ell^1$ oder c_0 und sei $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$, so dass $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige: Die Menge*

$$[-a,a] := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E : |x_n| \leq a_n \quad \textit{für alle} \quad n \in \mathbb{N}\}$$

ist kompakt in E . Man nennt $[-a,a]$ das von a erzeugte Ordnungsintervall.

1.6 Diagonalfolgen und der Satz von Arzela-Ascoli

Es ist unmittelbar klar, dass jede kompakte Teilmenge K eines Banachraumes abgeschlossen und beschränkt ist. (Die erste Aussage folgt aus Lemma

1.3.2, die zweite daraus, dass konvergente Folgen beschränkt sind). Wir werden sehen, dass jedoch die Umkehrung in unendlich dimensionalen normierten Vektorräumen falsch ist (siehe Satz 2.3.3). Es ist eine wichtige Aufgabe, die kompakten Teilmengen eines Banachraumes zu bestimmen. Solche Charakterisierungen sind für bestimmte Typen von Banachräumen möglich. Hier betrachten wir ein wichtiges Beispiel, den Raum $C(K)$ aller stetigen Funktionen auf einem metrischen Raum K . Um Kompaktheit nachzuweisen, ist das Diagonalfolgen-Argument äußerst nützlich. In etwas anderer Form ist es schon im Beweis von Theorem 4.3 vorgekommen. Wir benutzen wieder die verschiedenen Schreibweisen für Teilfolgen, die zu Beginn von § 1.4.5 eingeführt worden waren.

Lemma 1.6.1 (Diagonalfolgen-Argument)**.** *Zu jedem* $p \in \mathbb{N}$ *sei ein kompakter metrischer Raum* (M_p, d_p) *und eine Folge* $(x_n^p)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* M_p *gegeben. Dann existiert* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *streng monoton wachsend so, dass* $(x_{\varphi(n)}^p)_{n\in\mathbb{N}}$ *für jedes* $p \in \mathbb{N}$ *konvergiert.*

Beweis. Durch Induktion findet man unendliche Teilmengen J_p von $\mathbb{N}$ derart, dass die Teilfolge $(x_n^p)_{n\in J_p}$ konvergiert und außerdem $J_{p+1} \subset J_p$ für alle $p \in \mathbb{N}$. Nun definiert man $\varphi(p)$ als das p-te Element von J_p . Dann ist φ streng monoton. Sei $J := \{\varphi(p) : p \in \mathbb{N}\}$. Dann ist $J \setminus J_p$ endlich für alle $p \in \mathbb{N}$. Da $(x_n^p)_{n\in J_p}$ konvergiert, ist auch die Folge $(x_{\varphi(n)}^p)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n^p)_{n\in J}$ konvergent für jedes $p \in \mathbb{N}$. □

Bemerkung 1.6.2 (Produkttopologie)**.** Seien (M_p, d_p) kompakte metrische Räume $(p \in \mathbb{N})$. Das Produkt $M = \prod_{p\in\mathbb{N}} M_p$ ist dann ein metrischer Raum bzgl. der Metrik $d(x, y) = \sum_{p=1}^{\infty} 2^{-p} \min\{1, d_p(x^p, y^p)\}$, wobei $x = (x^p)_{p\in\mathbb{N}}, y = (y^p)_{p\in\mathbb{N}} \in M$.

a) Man sieht leicht, dass eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M genau dann gegen $x \in M$ konvergiert, wenn $\lim_{n\to\infty} x_n^p = x^p$ für alle $p \in \mathbb{N}$, wobei $x_n = (x_n^p)_{p\in\mathbb{N}}$, $x = (x^p)_{p\in\mathbb{N}}$. Damit beschreibt die Metrik d die komponentenweise Konvergenz in M .

b) Lemma 1.5.1 besagt gerade, dass (M, d) kompakt ist.

Sei K ein kompakter metrischer Raum. Mit $C(K)$ bezeichnen wir den Raum aller stetigen skalarwertigen Funktionen auf K . Dann ist $C(K)$ ein Banachraum bzgl. der Supremumsnorm

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in K} |f(x)| \,.$$

Beachte, dass mit f auch $|f|$ $(x \mapsto |f(x)|)$ stetig ist. Damit ist $\|f\|_\infty < \infty$. Es ist also $C(K) = C^b(K)$ (vgl. Beispiel 3.5).

Der Raum $C(K)$ ist ein wichtiger Banachraum. Wir wollen nun herausfinden, wie die kompakten Teilmengen von K aussehen.

Die folgende Definition ist sehr natürlich. Sei H eine Teilmenge von $C(K)$. Ist $x \in K$, so sagen wir, dass H **gleichstetig in** x ist, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U von x gibt, derart dass $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ für alle $y \in U$ und für alle $f \in H$. Man sagt, dass H **gleichstetig** ist, falls H in jedem x gleichstetig ist. Schließlich sagen wir, dass H **gleichmäßig gleichstetig** ist, wenn

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \;\text{ so dass }\; d(x,y) \leq \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$$

für alle $x, y \in K$ und alle $f \in H$.

Lemma 1.6.3. *Sei $H \subset C(K)$ gleichstetig. Dann ist H gleichmäßig gleichstetig.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Zu jedem $x \in K$ gibt es $\delta_x > 0$ so dass $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon/2$ wenn $d(x,y) \leq 2\delta_x$. Aus der Heine-Borel Eigenschaft folgt, dass

$$K = \bigcup_{j=1}^{m} B(x_j, \delta_{x_j})$$

für geeignete $x_1, \ldots, x_m \in K$. Sei $\delta = \min\limits_{j=1\ldots m} \delta_{x_j}$. Seien $x, y \in K$, $d(x,y) \leq \delta$. Es gibt $j \in \{1 \ldots m\}$ derart, dass $x \in B(x_j, \delta_{x_j})$. Damit ist $d(y, x_j) \leq d(y,x) + d(x, x_j) \leq \delta + \delta_{x_j} \leq 2\delta_{x_j}$. Also ist $|f(y) - f(x_j)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ und

$$|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(x)| \leq \varepsilon$$

für alle $f \in H$. □

Bemerkung 1.6.4. Seien (M_1, d_1), (M_2, d_2) metrische Räume und sei $f : M_1 \to M_2$ stetig. Ist M_1 kompakt, so ist f **gleichmäßig stetig**; d.h. für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ so dass $d_1(x, y) \leq \delta$ impliziert, dass $d_2(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$. Für $M_2 = \mathbb{K}$ folgt das aus Lemma 1.6.3, indem man $H = \{f\}$ wählt. Für beliebiges M_2 muß man im Beweis des Lemmas die Metrik in $\mathbb{K}$ durch d_2 ersetzen.

Satz 1.6.5. *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gleichstetige Folge in $C(K)$. Sei D eine dichte Teilmenge von K. Es existiere $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle $x \in D$. Dann konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C(K)$.*

Beweis. Wir zeigen, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Lemma 1.6.3 gibt es $\delta > 0$, so dass

$$d(x, y) \leq \delta \text{ impliziert } |f_n(x) - f_n(y)| \leq \frac{\varepsilon}{5}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da K präkompakt ist, findet man $x_1, \ldots, x_r \in K$ so dass $K = \bigcup\limits_{j=1}^{r} B(x_j, \delta)$. In jeder Kugel $B(x_j, \delta)$ gibt es ein $d_j \in D$. Nach Voraussetzung findet man $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass für alle

$$n, m \geq n_0 \text{ gilt } |f_n(d_j) - f_m(d_j)| \leq \frac{\varepsilon}{5}$$

für alle $j = 1 \ldots r$. Sei $n, m \geq n_0$. Sei $x \in K$. Es gibt $j \in \{1, \ldots r\}$ so dass $x \in B(x_j, \delta)$. Damit gilt $|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_n(x_j)| + |f_n(x_j) - f_n(d_j)| + |f_n(d_j) - f_m(d_j)| + |f_m(d_j) - f_m(x_j)| + |f_m(x_j) - f_m(x)| \leq \varepsilon$. Wir haben gezeigt, dass $\|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0$. $\square$

In Worten kann man den Satz 1.6.5 auch so fassen: In gleichstetigen Mengen von $C(K)$ impliziert die punktweise Konvergenz auf einer dichten Teilmenge schon die gleichmäßige Konvergenz. In Abschnitt 3.1 werden wir eine andere Sichtweise dieser Argumente kennenlernen (Aufgabe 3.3.7).

Nun beweisen wir folgende sehr nützliche Charakterisierung kompakter Mengen in $C(K)$.

Theorem 1.6.6 (Arzela-Ascoli)**.** *Sei K ein kompakter metrischer Raum. Eine Teilmenge H von $C(K)$ ist genau dann relativ kompakt, wenn sie gleichstetig und punktweise beschränkt ist.*

Dabei nennen wir $H \subset C(K)$ **punktweise beschränkt**, wenn

$$\sup_{f\in H} |f(x)| < \infty \quad \text{für alle} \quad x \in K \,. \tag{1.16}$$

Ist H beschränkt (d.h. $\sup\limits_{f\in H} \|f\|_\infty < \infty$), so ist H auch punktweise beschränkt. Da jede kompakte Teilmenge eines Banachraumes beschränkt ist, zeigt Theorem 1.6.6 insbesondere, dass für gleichstetige Mengen punktweise Beschränktheit und Beschränktheit äquivalent sind.

Beweis. Sei H gleichstetig und punktweise beschränkt. Da K separabel ist, finden wir eine abzählbare dichte Teilmenge $D = \{d_1, d_2, \ldots\}$ in K. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in H. Für jedes $p \in \mathbb{N}$ ist $(f_n(d_p))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt in $\mathbb{K}$ und somit relativ kompakt. Das Diagonalfolgen-Argument liefert uns $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton, so dass $(f_{\varphi(n)}(d_p))_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes p konvergiert. Aus Satz 1.5.5 folgt, dass die Folge $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ in $C(K)$ konvergiert.

Die umgekehrte Implikation ist einfach. Sei H kompakt. Sei $x \in K$. Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $f_1, \ldots, f_n \in H$, so dass $H \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} B(f_j, \varepsilon/3)$. Zu jedem $j \in \{1, \ldots n\}$ gibt es eine Umgebung U_j von x, derart dass $|f_j(x) - f_j(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $y \in U_j$. Die Menge $U = \bigcap\limits_{j=1}^{n} U_j$ ist eine Umgebung von x. Sei $y \in U$, $f \in H$. Es gibt $j \in \{1, \ldots n\}$ so dass $\|f - f_j\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Damit ist $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_j(x)| + |f_j(x) - f_j(y)| + |f_j(y) - f(y)| \leq \varepsilon$. Wir haben gezeigt, dass H gleichstetig ist. Wie wir schon vorher bemerkt hatten, folgt aus Kompaktheit immer Beschränktheit. Damit ist der Satz bewiesen. $\square$

Holomorphe Funktionen besitzen besondere Regularitätseigenschaften. Mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes zeigen wir leicht, dass jede beschränkte Familie zeigen wir leicht, dass jede beschränkte Familie holomorpher Funktionen automatisch gleichstetig ist. Damit erhält man aus Satz 1.5.5 folgendes verblüffendes Resultat.

Satz 1.6.7. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und seien $f_k : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph $(k \in \mathbb{N})$. Es gebe $c \geq 0$ so dass $|f_k(z)| \leq M$ für alle $z \in \Omega, k \in \mathbb{N}$. Sei $D \subset \Omega$ direkt so dass*

$$\lim_{k\to\infty} f_k(z)$$

existiert für alle $z \in D$ *. Dann existiert*

$$f(z) = \lim_{k\to\infty} f_k(z) \tag{1.17}$$

für alle $z \in \Omega$ *und definiert eine holomorphe Funktion* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *. Ferner ist die Konvergenz in ((1.17)) auf jeder kompakten Teilmenge von* Ω *gleichmäßig.*

Beweis. Sei $z_0 \in \Omega$. Wähle eine abgeschlossene Kreisscheibe $\bar{D}(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$, die ganz in Ω liegt. Dann ist nach dem Cauchyschen Integralsatz

$$f_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w-z_0|=r} \frac{f_k(w)}{w-z} dw \ . \tag{1.18}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} f_k(z) - f(z_0 &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w-z_0|=r} f_k(w)(\frac{1}{w-z} - \frac{1}{w-z_0})dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w-z_0|=r} (z-z_0)f_k(w)\frac{1}{(w-z)(w-z_0})dw \ . \end{aligned}$$

Wähle $z \in D(z_0, \frac{r}{2})$. Dann ist $|w - z| = |w - z_0 + z_0 - z| \geq |w - z_0| \geq r/2$ wenn $|w - z_0| = r$. Also ist

$$\begin{aligned} |f_k(z) - f_k(z_0)| &\leq \frac{1}{2\pi} 2\pi r |z - z_0| c \frac{1}{r/2} \cdot \frac{1}{r} \\ &= \frac{2c}{r} |z - z_0| \ . \end{aligned}$$

Damit ist die Familie $\{f_k : k \in \mathbb{N}\}$ gleichstetig. Aus Satz 1.5.5 folgt, dass $f(z) = \lim_{k\to\infty} f_k(z)$ für alle $z \in \Omega$ existiert, wobei die Konvergenz gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von K ist. Geht man in (1.18) zum Grenzwert über, so erhält man

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

falls $|z - z_0| < r$. Damit ist f holomorph. $\square$

Man kann nun ganz ähnlich wir im Beweis des Satzes von Arzela-Ascoli aus Satz 1.6.7 dem Satz von Montel folgen: Ist $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge von holomorphen Funktionen auf Ω , so gibt es eine Teilfolge, die gegen eine holomorphe Funktion konvergiert, und zwar gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen von Ω . In einem späteren Abschnitt werden wir diese Aussage jedoch verschärfen und eleganter beweisen.

Aufgabe 1.6.8. *a) Sei* K *ein kompakter metrischer Raum,* $a \in K$ *. Zeige, dass die Menge* $H = \{f \in Lip\ (K) : \|f\|_{Lip\ (a)} \leq 1\}$ *kompakt in* $C(K)$ *ist.*
b) Sei $-\infty < a < b < \infty$ *.* **Zeige:** *Die Menge* $B = \{f \in C^1[a,b] : |f(a)| + \|f'\|_\infty \leq 1\}$ *ist präkompakt in* $(C[a,b], \|\ \|_\infty)$ *.*

Aufgabe 1.6.9. *Sei* $E = \ell^1$ *,* $K \subset E$ *. Zeige, dass* K *genau dann präkompakt ist, wenn* K *beschränkt und* **gleichmäßig summierbar** *ist (d.h.* $\forall\ \varepsilon > 0$ *gibt es* $n_0 \in \mathbb{N}$ *, so dass* $\sum\limits_{n\geq n_0} |x_n| \leq \varepsilon$ *für alle* $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K)$ *.*

Aufgabe 1.6.10. *Sei* $E = c_0$ *,* K *eine kompakte Teilmenge von* E *. Zeige: Es gibt* $x \in c_0$ *, so dass* $x_n \geq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $K \subset [-x, x]$ *. (vgl. Aufgabe 1.4.11).*

Aufgabe 1.6.11. *Sei* $(x^m)_{m\in\mathbb{N}}$ *eine beschränkte Folge in* ℓ^∞ *. Zeige, dass es eine Teilfolge* $(x^{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *gibt, derart dass* $(x_n^{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *konvergiert.*

1.7 ⋆ Der Satz von Mittag-Leffler

[1] Wir beweisen ein raffiniertes topologisches Resultat, den Satz von Mittag-Leffler. Er hat einige interessante Konsequenzen in der Funktionalanalysis. Der einfachere Satz von Baire kann daraus hergeleitet werden. Da letzterer ein besonders wichtiges Hilfsmittel in der Operatorentheorie liefert, geben wir später in Kapitel 2 noch einen direkten Beweis.
Um den Satz von Mittag-Leffler formulieren zu können wollen wir folgende Terminologie einführen. Zu jedem $n \in \mathbb{N}_0$ sei M_n ein vollständiger metrischer Raum gegeben sowie eine stetige Abbildung $\theta_n : M_{n+1} \to M_n$ mit dichtem Bild. Wir nennen dann die Menge $\{(M_n, \theta_n) : n \in \mathbb{N}_0\}$ eine **projektive Familie vollständiger metrischer Räume**. Eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heiße **projektiv**, falls $y_n \in M_n$ und $\theta_n(y_{n+1}) = y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Wir nennen y_0 den **finalen** Punkt der Folge. Solche Folgen kommen sozusagen aus dem Unendlichen, und es ist zunächst gar nicht klar, ob es projektive Folgen gibt.

Schließlich heißt ein Element x von M_0 **final** (bzgl. der projektiven Familie), falls es eine projektive Folge $(y_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ gibt so dass $x = y_0$. Die finalen Elemente sind also genau die Endpunkte von projektiven Folgen.

Der folgende Satz zeigt nun, dass es sogar sehr viele projektive Folgen gibt.

Satz 1.7.1 (Mittag-Leffler)**.** *Sei $\{(M_n, \theta_n) : n \in \mathbb{N}_0\}$ eine projektive Familie vollständiger metrischer Räume. Dann ist die Menge F der finalen Punkte dicht in M_0 .*

Beweis. Wir bezeichnen die Metrik auf M_n durchweg mit d . Die Idee des Beweises besteht darin, $y_n \in M_n$ zu konstruieren derart, dass

$$z_k = \lim_{n\to\infty} \theta_k \circ \ldots \circ \theta_{n-1}(y_n) \tag{1.19}$$

in M_k für alle $k \in \mathbb{N}_0$ existiert. Dann ist für $k \in \mathbb{N}$, $\theta_{k-1}(z_k) = \lim_{n\to\infty} \theta_{k-1} \circ \cdots \circ \theta_{n-1}(y_n) = z_{k-1}$, d.h. $(z_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ ist projektiv.

---

[1]Das Thema dieses Abschnitts gehört nicht zum Grundwissen in Funktionalanalysis, daher trägt der Titel einen $(\star)$

Sei $x \in M_0$, $\varepsilon > 0$. Wir setzen $y_0 = x$ und konstruieren induktiv $y_n \in M_n$, $n \in \mathbb{N}$, derart dass gilt:

$$d(y_n\,,\,\theta_n(y_{n+1})) \le \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \quad (n \in \mathbb{N}_0)\;, \tag{1.20}$$

$$d(\theta_k \circ \ldots \circ \theta_{n-1}(y_n)\,,\,\theta_k \circ \theta_{k+1} \circ \ldots \circ \theta_n(y_{n+1})) \le \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \tag{1.21}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, $k = 0, \ldots, n-1$.

Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $y_0, y_1 \ldots, y_n$ konstruiert. Da θ_n dichtes Bild in M_{n+1} hat, gibt es $w_p \in M_{n+1}$ so dass $\lim\limits_{p\to\infty} \theta_n(w_p) = y_n$. Damit gilt auch $\lim\limits_{p\to\infty} \theta_k \circ \ldots \circ \theta_{n-1} \circ \theta_n(w_p) = \theta_k \circ \ldots \circ \theta_{n-1}(y_n)$ für $k = 0, \ldots, n-1$. Setze $y_{n+1} = w_p$ für $p \in \mathbb{N}$ genügend groß. Dann sind (1.20), (1.21) erfüllt. Damit ist die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konstruiert. Sei $k \in \mathbb{N}$.
Setze $z_{k,k} = y_k$ und

$$z_{k,n} = \theta_k \circ \ldots \circ \theta_{n-1}(y_n) \quad \text{für} \quad n > k\;.$$

Dann gilt $d(z_{k,n}\;,\;z_{k,n+1}) \le \varepsilon/2^{n+1}$ für $n \ge k$. Damit existiert $z_k := \lim\limits_{n\to\infty} z_{k,n}$ in M_k (siehe Aufgabe 1.3.10) wie wir es in (1.19) gefordert hatten. Somit ist $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine projektive Folge mit finalem Element $z_0 = \lim\limits_{n\to\infty} z_{0,n}$. Es ist $z_{0,0} = x$ und $d(z_{0,n+1}, z_{0,n}) \le \varepsilon/2^{n+1}$. Damit ist wegen (1.21) $d(x, z_{0,n}) \le \sum\limits_{m=0}^{n-1} d(z_{0,m}, z_{0,m+1}) \le \varepsilon \sum\limits_{m=0}^{n-1} 2^{-(m+1)} = \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist $d(x, z_0) \le \varepsilon$. □

Ser Satz von Mittag-Leffler hat verblüffende Konsequenzen in der Operatorentheorie.

Hier erhalten wir den Satz von Baire als Korollar des Satzes von Mittag-Leffler, wenn wir folgendes Lemma benutzen.

Lemma 1.7.2. *Sei O eine offene Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes (M, d) . Dann definiert*

$$d_O(x, y) = d(x, y) + \left|\frac{1}{d(x, O^c)} - \frac{1}{d(y, O^c)}\right| \tag{1.22}$$

eine Metrik auf O *, die auf* O *zur gegebenen Metrik äquivalent ist und bzgl. der* (O, d_O) *vollständig ist.*

Hier setzen wir $O^c = M \setminus O$ und $d(x, O^c)$ bezeichnet den Abstand von x zu O^c (siehe Satz 1.2.7). Die Äquivalenz zweier Metriken wurde in Anschluß an Korollar 1.2.5 definiert.

Beweis. a) Man sieht leicht, dass d_O eine Metrik auf O definiert.
b) Wir zeigen, dass beide Metriken auf O äquivalent sind. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset O$, $x \in O$, so dass $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$. Aus Satz 1.2.7 folgt, dass $\lim_{n\to\infty} d(x_n, O^c) = d(x, O^c)$. Damit gilt auch $\lim_{n\to\infty} d_O(x_n, x) = 0$. Da $d \le d_0$ folgt daraus die Äquivalenz.
c) Bleibt zu zeigen, dass O bzgl. d_O vollständig ist. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge bzgl. d_O. Wegen $d \le d_O$ ist dann $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch Cauchy'sch bzgl. d und somit existiert $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ in M. Wegen b) bleibt nur noch zu zeigen, dass $x \in O$. Angenommen, $x \in O^c$. Es gibt $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $d_O(x_n, x_m) \le 1$ für alle $n, m \ge n_0$. Damit ist

$$\begin{aligned} &\left| \tfrac{1}{d(x_n,O^c)} - \tfrac{1}{d(x_m,O^c)} \right| \le 1\,, \quad \text{also} \\ &|d(x_m, O^c) - d(x_n, O^c| \le d(x_n, O^c) d(x_m, O^c) \ \ (n, m \ge n_0)\,. \end{aligned}$$

Beachte, dass $d(x, O^c) = 0$. Da die Abstandsfunktion stetig ist, folgt mit $m \to \infty$ dass $|d(x_n, O^c)| \le 0$ für $n \ge n_0$. Das ist ein Widerspruch, da $x_n \in O$. □

Seien O_1, O_2 offene dichte Teilmengen eines metrischen Raumes M. Dann ist auch $O_1 \cap O_2$ in M dicht. (Sei nämlich $x \in M,\ \varepsilon > 0$, dann gibt es $x_1 \in O_1 \cap B(x, \varepsilon/2)$. Da O_1 offen ist, gibt es $0 < \delta \le \varepsilon/2$ derart dass $B(x_1, \delta) \subset O_1$. Da O_2 dicht in M ist, findet man $x_2 \in B(x_1, \delta) \cap O_2$. Damit ist $x_2 \in O_1 \cap O_2$ und $d(x_2, x) \le d(x_2, x_1) + d(x_1, x) < \varepsilon$. Also ist $x_2 \in O_1 \cap B(x, \varepsilon)$.)

Per Induktion erhält man daraus, dass der Durchschnitt endlich vieler offener, dichter Teilmengen von M dicht in M ist. Erstaunlicherweise gilt in einem vollständigen metrischen Raum viel mehr:

Theorem 1.7.3 (Baire)**.** *Sei* (M, d) *ein vollständiger metrischer Raum und* $\{O_n : n \in \mathbb{N}\}$ *eine abzählbare Familie offener Teilmengen von* M *. Ist* O_n

dicht in M *für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *, so ist auch* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ *dicht in* M *.*

Beweis. Setze $O_0 = M$. Wir können annehmen, dass $O_{n+1} \subset O_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (andernfalls ersetzen wir O_n durch $\bigcap_{k=1}^{n} O_k$) . Ferner betrachten wir auf O_n eine zu d äquivalente Metrik d_n , so dass (O_n, d_n) vollständig ist. Mit $\theta_n : O_{n+1} \to O_n$ bezeichnen wir die Einbettung von O_{n+1} in O_n . Dann ist $\{(M_n, \theta_n) : n \in \mathbb{N}_0\}$ eine projektive Familie. Nach dem Satz von Mittag-Leffler ist die Menge F der finalen Elemente dicht in $M = O_0$. Da $\theta_n(x) = x$ für alle $x \in O_{n+1}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$. □

Häufig benutzt man den Satz von Baire in folgender äquivalenter Form.

Korollar 1.7.4. (Baire). *Sei* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von abgeschlossenen Mengen in einem vollständigen metrischen Raum* M *, so dass*

$$M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \ .$$

Dann gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ *, derart dass* A_{n_0} *nicht-leeres Inneres besitzt.*

Beweis. Wende Theorem 1.7.3 auf $O_n = M \setminus A_n$ an. □

Als Illustration geben wir einige Anwendungen des Satzes von Baire. Ein Element x eines metrischen Raumes M heißt **isoliert**, falls es $\varepsilon > 0$ gibt, derart dass $B(x, \varepsilon) = \{x\}$.

Korollar 1.7.5. *Sei* (M, d) *ein vollständiger metrischer Raum ohne isolierte Punkte. Dann ist* M *überabzählbar.*

Beweis. Ist $M = \{z_n, n \in \mathbb{N}\}$, so gibt es nach Korollar 1.7.4 ein $m \in \mathbb{N}$ derart dass $\{z_m\}$ nicht-leeres Inneres hat. Das heißt aber gerade, dass z_m ein innerer Punkt ist. □

Korollar 1.7.6. *Sei* M *ein vollständiger metrischer Raum. Ist* M *abzählbar, so sind die isolierten Punkte dicht in* M *.*

Beweis. Sei $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ die Menge der Punkte in M, die nicht isoliert sind. Dann ist $O_n = M \setminus \{b_n\}$ offen und dicht für alle $n \in \mathbb{N}$. Der Satz von Baire impliziert, dass $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n = M \setminus B$ dicht ist. □

Korollar 1.7.7. *Ein unendlichdimensionaler Banachraum besitzt keine abzählbare Vektorraumbasis.*

Beweis. Sei E ein Banachraum und $\{b_k : k \in \mathbb{N}\} \subset E$. Sei E_k ein endlichdimensionaler Unterraum von E. Sei $E_k = \lim\{b_m : m \leq k\}$. Dann ist E_k ein endlichdimensionaler Unterraum von E. Damit ist E_k abgeschlossen. Angenommen, $E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$. Dann gibt es nach dem Satz von Baire ein $k_0 \in \mathbb{N}$ so dass $\overset{\circ}{E}_{k_0} \neq \emptyset$. Damit existieren $x \in E, \varepsilon > 0$ so dass $B(x,\varepsilon) \subset E_{k_0}$. Da E_{k_0} ein Vektorraum ist, folgt dass $B(0,\varepsilon) = B(x,\varepsilon) - x \subset E_{k_0}$ und somit $E \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nB(0,\varepsilon) \subset E_{k_0}$. Also ist E endlichdimensional. □

Aufgabe 1.7.8. *Es gibt $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig, so dass f in keinem Punkt differenzierbar ist.*

Anleitung: Betrachte den Banachraum $C[0,1] = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, $f(x) = f(0)$ für alle $x < 0$ und $f(y) = f(1)$ für alle $y > 1\}$. Zeige, dass

$$O_n = \{f \in C[0,1] : \sup_{0<|y|<n^{-1}} \frac{1}{|y|}|f(x+y) - f(x)| > n \quad \text{für alle} \quad x \in [0,1]\}$$

offen und dicht in $C[0,1]$ ist (vgl. [W, Seite 123]).

Kapitel 2

Lineare Operatoren

In diesem Kapitel untersuchen wir lineare stetige Abbildungen zwischen Banachräumen. Die tiefliegendsten Ergebnisse sind Konsequenzen des Satzes von Baire: das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit, der Satz vom abgeschlossenen Graphen und der Satz vom stetigen Inversen.

2.1 Grundlegende Eigenschaften und Beispiele

Seien E und F normierte Vektorräume über $\mathbb{K}$, wobei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$. Mit $B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ bezeichnen wir die abgeschlossene Einheitskugel von E.

Satz 2.1.1. *Sei $T : E \to F$ linear. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) T ist stetig;

(ii) es gibt $c \geq 0$ so dass $\|Tx\| \leq c\|x\|$ für alle $x \in E$;

(iii) es gibt $c \geq 0$ so dass $\|Ty\| \leq c$ für alle $y \in B_E$.

Beweis. $(iii) \Rightarrow (ii)$. Sei $x \in E$, $x \neq 0$. Setze $y = \|x\|^{-1} \cdot x \in B_E$. Dann ist nach Voraussetzung $\|Tx\| = \|x\| \cdot \|Ty\| \leq \|x\| \cdot c$. $(ii) \Rightarrow (iii)$. Das ist trivial.
$(ii) \Rightarrow (i)$. Wegen der Linearität von T ist

$$\|Tx - Ty\| = \|T(x-y)\| \leq c\|x-y\| . \tag{2.1}$$

Damit ist T sogar gleichmäßig stetig.
$(i) \Rightarrow (iii)$. Nach Voraussetzung ist T stetig, also insbesondere stetig in 0 . Damit existiert $\delta > 0$, so dass $\|Tx\| \leq 1$, falls $\|x\| \leq \delta$. Sei $y \in B_E$. Setze $x = \delta \cdot y$. Dann ist $\|x\| \leq \delta$. Also gilt $\|Ty\| = \delta^{-1}\|Tx\| \leq \delta^{-1}$. □

Man nennt stetige lineare Abbildungen auch **stetige Operatoren** oder auch **beschränkte Operatoren**. Die letztere Bezeichnung rührt daher, dass nach Satz 2.1.1 eine lineare Abbildung $T : E \to F$ genau dann stetig ist, wenn das Bild TB_E der Einheitskugel beschränkt ist. Der obige Beweis zeigt ferner, dass die drei Eigenschaften, Stetigkeit in 0 , Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit, für lineare Abbildungen äquivalent sind.

Mit $\mathcal{L}(E, F)$ bezeichnen wir die Menge der stetigen Operatoren von E nach F und setzen $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$. Sei $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Dann heißt

$$\|T\| = \inf\{c \geq 0 : \|Tx\| \leq c\|x\| \quad \forall\, x \in E\} \tag{2.2}$$

die **Operatornorm** von T . Der Beweis von Satz 2.1.1 zeigt, dass für festes $c \geq 0$ die Aussagen *(ii)* und *(iii)* äquivalent sind. Insbesondere ist also

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in B_E\} . \tag{2.3}$$

Sei $c_n > \|T\|$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \|T\|$. Sei $x \in E$. Dann gilt $\|Tx\| \leq c_n\|x\|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist

$$\|Tx\| \leq \|T\|\,\|x\| \quad (x \in E) . \tag{2.4}$$

Sind $S, T \in \mathcal{L}(E, F)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, so definieren wir $S + T$, $\lambda T : E \to F$ durch

$$\begin{array}{lcll} (S+T)x & = & Sx + Tx & (x \in E) \\ (\lambda T)x & := & \lambda \cdot Tx & (x \in E) . \end{array}$$

Es ist offensichtlich, dass $S + T$ und λT linear sind. Ferner ist nach (2.4) für $x \in E$, $\|(S+T)x\| = \|Sx + Tx\| \leq \|Sx\| + \|Tx\| \leq (\|S\| + \|T\|)\|x\|$. Damit ist $S + T \in \mathcal{L}(E, F)$ und $\|S + T\| \leq \|S\| + \|T\|$. Genauso ist $\lambda T \in \mathcal{L}(E, F)$ und $\|\lambda T\| = |\lambda|\,\|T\|$. Wegen (2.4) ist $\|T\| = 0$ genau dann wenn $Tx = 0$ für alle $x \in E$ ist; d.h. wenn $T = 0$ ist. Wir haben gezeigt, daß $\mathcal{L}(E, F)$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist.

Satz 2.1.2. *Sei E ein normierter Raum und F ein Banachraum. Dann ist $\mathcal{L}(E,F)$ ein Banachraum.*

Beweis. Wir müssen zeigen, daß $\mathcal{L}(E,F)$ vollständig ist. Sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}(E,F)$. Nach (2.4) ist

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\| \, \|x\| \quad (n \in E) . \tag{2.5}$$

Damit ist $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, und wir setzen $Tx = \lim\limits_{n\to\infty} T_n x$. Es ist klar, daß $T : E \to F$ linear ist. Da $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, ist $c := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$. Damit ist

$$\|Tx\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \leq c\|x\| \quad \text{für alle} \quad x \in E ,$$

und somit ist T stetig. Bleibt zu zeigen, dass $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$ in $\mathcal{L}(E,F)$. Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $\|T_n - T_m\| \leq \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0$. Aus (2.5) erhalten wir

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \varepsilon \|x\| \quad (n, m \geq n_0 \, , \, x \in E) .$$

Mit $m \to \infty$ folgt $\|T_n x - Tx\| \leq \varepsilon \|x\| (x \in E, n \geq n_0)$. Also ist $\|T_n - T\| \leq \varepsilon$ für $n \geq n_0$. □

Seien E, F, G normierte Räume und seien $S \in \mathcal{L}(E,F)$, $T \in \mathcal{L}(F,G)$. Dann ist $T \circ S : E \to G$ linear und $\|(T \circ S)x\| = \|T(Sx)\| \leq \|T\| \, \|Sx\| \leq \|T\| \, \|S\| \, \|x\|$ nach (2.4). Damit ist

$$T \circ S \in \mathcal{L}(E,G) \quad \text{und} \quad \|T \circ S\| \leq \|T\| \, \|S\| . \tag{2.6}$$

Wir schreiben auch oft $TS = T \circ S$ für die Komposition von Operatoren und sprechen von Multiplikation statt Komposition. Die Distributivgesetze

$$\begin{aligned} (T_1 + T_2)S &= T_1 S + T_2 S \\ T((S_1 + S_2) &= TS_1 + TS_2 \end{aligned}$$

für $S_1, S_2 \in \mathcal{L}(E,F)$, $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(F,G)$ folgen unmittelbar aus der Linearität der Abbildungen.

Aus (2.6) folgt ferner, dass die Multiplikation stetig ist, d.h. für $T_n, T \in \mathcal{L}(F,G)$, $S_n, S \in \mathcal{L}(E,F)$ mit $\lim_{n\to\infty} T_n = T$ und $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ gilt $\lim_{n\to\infty} T_n S_n = TS$. Das folgt aus (1.6) mit Hilfe der Dreiecksungleichung : $\|T_n S_n - TS\| \leq \|T_n(S_n - S)\| + \|(T_n - T)S\| \leq \|T_n\|\, \|S_n - S\| + \|T_n - T\|\, \|S\| \to 0 \quad (n \to \infty)$.

Seien E und F normierte Räume. Ist $T \in \mathcal{L}(E,F)$ bijektiv, so ist T^{-1} linear. Wir sagen, dass T **invertierbar** ist, falls T bijektiv und T^{-1} stetig ist. Ein invertierbarer Operator wird auch **Isomorphismus** genannt. Zwei normierte Räume E und F heißen **isomorph**, falls es einen Isomorphismus T von E nach F gibt. Sind E und F isomorph, so sieht man leicht, dass E genau dann vollständig ist, wenn F es ist. Eine lineare Abbildung $T : E \to F$ heißt **isometrisch**, falls

$$\|Tx\| = \|x\| \quad \text{für alle} \quad x \in E\ .$$

Ist T zusätzlich bijektiv, so heißt T ein **isometrischer Isomorphismus**. Zwei normierte Vektorräume heißen **isometrisch isomorph**, falls es einen isometrischen Isomorphismus $T : E \to F$ gibt.

Beispiel 2.1.3. Die Räume c und c_0 sind isomorph. Ein Isomorphismus $T : c \to c_0$ ist gegeben durch folgende Vorschrift. Ist $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c$, so setzen wir $x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n$. Definiere $Tx = (x_\infty, x_1 - x_\infty, x_2 - x_\infty, \ldots)$.

Sei $I \in \mathcal{L}(E)$ die **Identität** (d.h. $Ix = x$ für alle $x \in E$) . Dann gilt $T \circ I = I \circ T = T$ für alle $T \in \mathcal{L}(E)$. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(E)$ ist genau dann invertierbar, wenn es $S \in \mathcal{L}(E)$ gibt so dann $T \circ S = S \circ T = I$. Dann ist $S = T^{-1}$.

Sei E ein Banachraum. Dann können wir in $\mathcal{L}(E)$ das Analogon zur geometrischen Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = (1-q)^{-1} \quad (q \in \mathbb{K},\ |q| < 1)$$

bilden. Sei $T \in \mathcal{L}(E)$ und $\|T\| < 1$. Wir definieren $T^\circ = I$ und $T^n = T \circ \ldots \circ T$ (n-mal) für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\|T^n\| \leq \|T\|^n$. Somit existiert nach

Satz 1.3.4 $S = \sum_{k=0}^{\infty} T^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} T^k$ in $\mathcal{L}(E)$. Ferner ist $\lim_{n\to\infty} T^n = 0$. Nun ist

$$(I-T)\sum_{k=0}^{\infty} T^k = (I - T^{n+1}) \quad (n \in \mathbb{N}) .$$

Wegen der Stetigkeit der Multiplikation ergibt sich

$$(I-T)S = \lim_{n\to\infty} (I - T^{n+1}) = I .$$

Genauso ist $S(I-T) = I$.

Wir haben also gezeigt, dass $I - T$ invertierbar ist und $(I-T)^{-1} = S$. Damit ist folgender Satz bewiesen:

Satz 2.1.4. *Sei E ein Banachraum und $T \in \mathcal{L}(E)$ mit $\|T\| < 1$. Dann ist $(I-T)$ invertierbar und*

$$(I-T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k . \tag{2.7}$$

Man nennt (2.7) die **Neumann Reihe**.

Der folgende Begriff ist wichtig. Sei E ein normierter Vektorraum. Dann heißt $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ der **Dualraum von** E . Damit ist also E' ein Banachraum. Seine Elemente heißen **die stetigen Linearformen auf** E .
Am Ende des Abschnitts und im Verlauf des Skripts werden wir einige Duale konkreter Banachräume bestimmen. Wir schließen den Abschnitt mit einem nützlichen Fortsetzungssatz.

Satz 2.1.5 (Eindeutige stetige Fortsetzung)**.** *Sei E ein normierter Vektorraum, E_0 ein dichter Unterraum von E . Sei F ein Banachraum und $T_0 \in \mathcal{L}(E_0, F)$. Dann gibt es genau einen Operator $T \in \mathcal{L}(E, F)$, so dass*

$$T_0 x = Tx \quad \text{für alle} \quad x \in E_0 .$$

Ferner gilt: $\|T_0\| = \|T\|$.

Beweis. Sei $x \in E$. Dann gibt es $x_n \in E_0$, so dass $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Da $\|T_0x_n - T_0x_m\| \leq \|T_0\| \, \|x_n - x_m\|$, ist $(T_0x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Wir definieren $Tx := \lim\limits_{n\to\infty} T_0x_n$. Damit ist $T_0 : E \to F$ wohldefiniert. Ist nämlich $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge in E_0 mit $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$. Also ist $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \|T_0x_n - T_0y_n\| \leq \lim\limits_{n\to\infty} \|T_0\| \, \|x_n - y_n\| = 0$. Folglich gilt

$$\lim_{n\to\infty} T_0x_n = \lim_{n\to\infty} T_0y_n \ .$$

Aus der Linearität von T_0 ergibt sich, dass $T : E \to F$ ebenfalls linear ist. Ferner ist $\|Tx\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|T_0x_n\| \leq \lim\limits_{n\to\infty} \|T_0\| \, \|x_n\| = \|T_0\| \, \|x\|$. Also ist $\|T\| \leq \|T_0\|$. Da T eine Fortsetzung von T_0 ist, ist $\|T\| = \|T_0\|$. Die Eindeutigkeit ist unmittelbar klar. □

Aufgabe 2.1.6. *a) Sei* $E = c_0$. *Sei* $y \in \ell^1$. *Dann definiert* $\varphi_y(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ *eine stetige Linearform* $\varphi_y \in E'$. *Zeige, dass* $y \mapsto \varphi_y : \ell^1 \to c_0'$ *ein isometrischer Isomorphismus ist. Damit ist also* c_0' *isometrisch isomorph zu* ℓ^1 . *Wir sagen auch kürzer:* ℓ^1 *ist der Dualraum von* c_0 .
b) Sei $E = \ell^1$. *Sei* $y \in \ell^\infty$. *Dann definiert* $\varphi_y(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ *eine stetige Linearform* $\varphi_y \in E'$. *Zeige:* $y \mapsto \varphi_y : \ell^\infty \to (\ell^1)'$ *ist ein isometrischer Isomorphismus. Der Dualraum von* ℓ^1 *ist also* ℓ^∞ .

Aufgabe 2.1.7. *Sei* $-\infty < a < b < \infty$, $E = C[a,b]$. *Sei* $k \in C[a,b]$. *Dann definiert* $\varphi_k(f) = \int_a^b f(t)k(t)\,\mathrm{dt}$ *eine stetige Linearform* $\varphi_k \in C[a,b]'$ *und es gilt* $\|\varphi_k\| = \int_a^b |k(t)|\,\mathrm{dt}$.

Anleitung: Zu $\varepsilon > 0$ betrachte $f(t) = \overline{k(t)}(|k(t)|^2 + \varepsilon^2)^{-1/2}$.

Aufgabe 2.1.8. *a) Sei* $E = \ell^1$. *Mit* $e_m = (0, \ldots 1, 0 \ldots)$ *bezeichnen wir den* n*-ten Einheitsvektor. Sei* $T \in \mathcal{L}(\ell^1)$. *Sei* $Te_m = (a_{nm})_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$. *Dann gilt* $Tx = (\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{nm}x_m)_{n\in\mathbb{N}}$ *für alle* $x \in \ell^1$. *Zeige, dass diese Beziehung einen isometrischen Isomorphismus zwischen* $\mathcal{L}(\ell^1)$ *und dem Vektorraum von Matrizen* $G_1 = \{A = (a_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}} : \sup\limits_{m\in\mathbb{N}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{nm}| < \infty\}$ *mit der Norm* $\|A\|_G = \sup\limits_{m\in\mathbb{N}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{nm}|$ *definiert.*
b) Sei $E = c_0$. *Zeige analog zu a) dass* $\mathcal{L}(c_0)$ *isometrisch isomorph zum Raum* $G_0 = \{A = (a_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}} : \|A\|_{G_0} < \infty\}$ *mit der Norm* $\|A\|_{G_0} = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \sum\limits_{m=1}^{\infty} |a_{nm}|$ *ist.*

c) Der Raum $\mathcal{L}(\ell^1, \ell^\infty)$ *ist isometrisch isomorph zu* $\ell^\infty(N \times \mathbb{N}) = \{A = (a_{nm})_{n,m\in\mathbb{N}} : \|A\|_\infty < \infty\}$ *, wobei* $\|A\|_\infty = \sup\limits_{n,m\in\mathbb{N}} |a_{nm}|$ *.*

Aufgabe 2.1.9 (Kernoperatoren). *Sei* $E = C[a,b]$, $k \in C([a,b] \times [a,b])$ *. Durch*

$$(T_k f)(x) = \int_a^b k(x,y) f(y)\,\mathrm{dy} \quad (f \in C[a,b])$$

wird ein beschränkter Operator $T_k \in \mathcal{L}(C[a,b])$ *definiert. Es gilt:*

$$\|T_k\| \le \sup_{x\in[a,b]} \int_a^b |k(x,y)|\,\mathrm{dy} \; .$$

Aufgabe 2.1.10 (1 -dimensionale Differentialoperatoren). *a) Sei* $E = C^1[a,b]$ *mit der Norm* $\|f\|_E = \|f\|_\infty$ *und* $F = C[a,b]$ *. Dann definiert* $Tf = f'$ *einen stetigen Operator* $T \in \mathcal{L}(E,F)$ *.*

b) Sei $k \in \mathbb{N}$, $E = C^k[a,b]$ *mit der Norm* $\|f\|_E = \sum\limits_{m=0}^{k} \|f^{(m)}\|_\infty$ *. Sei* $a_m \in C[a,b]$ *. Dann definiert* $Tf = \sum\limits_{m=0}^{k} a_m f^{(m)}$ *einen stetigen Operator von* E *nach* $C[a,b]$ *.*

Aufgabe 2.1.11. *Seien* E *und* F *Banachräume. Zeige, dass die Menge*

$$G := \{T \in \mathcal{L}(E,F) : T \textit{ ist invertierbar}\}$$

offen in $\mathcal{L}(E,F)$ *ist.*

Anleitung: *a) Sind* $S, T \in G$ *, so ist auch* $ST \in G$ *.*
b) Sei $T \in G$ *. Schreibe* $S \in \mathcal{L}(E,F)$ *als* $S = (I - (T-S)T^{-1})T$ *und benutze Satz 2.1.4.*

2.2 Endlichdimensionale Räume

In diesem Abschnitt wollen wir einige Eigenschaften zusammenstellen, die in endlich-dimensionalen Banachräumen gelten oder sogar äquivalent zur Endlichkeit der Dimension sind.

Sei E ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Zwei Normen $\|\;\|_1$ und $\|\;\|_2$ heißen äquivalent falls es $\alpha > 0$, $\beta > 0$ gibt, derart dass

$$\alpha\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \beta\|x\|_1 \qquad (2.8)$$

für alle $x \in E$. Es ist unmittelbar klar, dass dieses gleichbedeutend damit ist, dass die Identität ein Isomorphismus von $(E, \| \quad \|_1)$ nach $(E, \| \quad \|_2)$ ist.

Damit sind zwei Normen $\| \ \|_1$ und $\| \ \|_2$ genau dann äquivalent wenn gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{bzgl. } \| \ \|_1 \ \Leftrightarrow \ \lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{bzgl. } \| \ \|_2 \ .$$

Satz 2.2.1. *Jede Norm auf* $\mathbb{K}^N$ *ist äquivalent zur Norm* $\| \quad \|_\infty$.

Beweis. Sei $\| \quad \|$ eine Norm auf $\mathbb{K}^N$ und sei $\{e_1, \ldots, e_N\}$ die kanonische Basis. Dann ist $\|x\| = \| \sum_{i=1}^{N} x_i e_i \| \le \sum_{i=1}^{N} |x_i| \, \|e_i\| \le \beta \|x\|_\infty$ mit $\beta = \sum_{i=1}^{N} \|e_i\|$. Folglich ist $| \, \|x\| - \|y\| \, | \le \|x-y\| \le \beta \|x-y\|_\infty$ für alle $x, y \in \mathbb{K}^N$. Damit ist $\| \quad \| : (\mathbb{K}^N, \| \quad \|_\infty) \to \mathbb{R}_+$ stetig. Die Menge $S := \{x \in \mathbb{K}^N, \|x\|_\infty = 1\}$ ist kompakt. Also gibt es nach Korollar 1.5.8 $a \in S$, so dass $\alpha := \|a\| = \min_{x\in S} \|x\|$. Da $a \ne 0$, ist $\alpha > 0$. Sei $x \in \mathbb{K}^N$, $x \ne 0$. Dann ist $x/\|x\|_\infty \in S$. Also ist $(1/\|x\|_\infty)\|x\| = \| \, \|x\|_\infty^{-1} \cdot x \| \ge \alpha$; d.h. $\|x\| \ge \alpha \|x\|_\infty$. □

Damit definiert jede Norm auf $\mathbb{K}^N$ die koordinatenweise Konvergenz für Folgen. Als Folgerung erhalten wir unmittelbar den Satz:

Satz 2.2.2. *Sei* $(E, \| \quad \|)$ *ein endlich dimensionaler normierter Vektorraum über* $\mathbb{K}$ *der Dimension* N *. Dann gilt:*

(a) $(E, \| \ \|)$ *ist isomorph zu* $(\mathbb{K}^N, \| \quad \|_\infty)$ *;*

(b) $(E, \| \quad \|)$ *ist vollständig;*

(c) jede Norm auf E *ist zu der gegebenen Norm äquivalent.*

Beweis. Sei $\{b_1, \ldots, b_N\}$ eine Basis von E . Dann definiert $Tx = \sum_{j=1}^{N} x_j b_j \quad (x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{K}^N)$ eine bijektive, lineare Abbildung $T : \mathbb{K}^N \to E$. Setze $\|x\|_0 := \|Tx\| \quad (x \in \mathbb{K}^N)$. Dann ist $\| \quad \|_0$ eine Norm auf $\mathbb{K}^N$ bzgl. der T ein isometrischer Isomorphismus ist. Nach Satz 2.2.1 ist $\| \ \|_0$ äquivalent zu der Norm $\| \ \|_\infty$ auf $\mathbb{K}^N$. Damit ist $T : (\mathbb{K}^N, \| \ \|_\infty)$ ein Isomorphismus. Da $(\mathbb{K}^N, \| \ \|_\infty)$ vollständig ist, ist also auch $(E, \| \quad \|)$ vollständig. Die letzte

Aussage folgt leicht aus dem Vorhergehenden. □

In $\mathbb{K}^N$ ist eine Teilmenge kompakt genau dann wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist. Diese Eigenschaft gilt nur in endlich-dimensionalen Räumen.

Satz 2.2.3. *Sei* $(E, \| \quad \|)$ *ein normierter Vektorraum. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) $\dim E < \infty$ *;*

(ii) jede beschränkte, abgeschlossene Teilmenge von E *ist kompakt.*

Der Beweis der nicht-trivialen Implikation (ii) $\Rightarrow$ (i) beruht auf folgendem Lemma, das auch in anderen Situationen nützlich sein wird (vgl. § 4.3). In Aufgabe 2.2.7 wird ein anderer sehr eleganter Beweis von Satz 2.2.3 gegeben.

Sei E ein normierter Raum und F ein Unterraum von E . Wie vorher bezeichnen wir mit

$$d(x, F) := \inf\{\|x - y\| : y \in F\}$$

den **Abstand** von x zu F . Damit ist $x \in F$ genau dann wenn $d(x, F) = 0$. Ist $x \in E \setminus F$ und $\|x\| = 1$, so ist

$$d(x, F) \leq \|x - 0\| = 1 \; .$$

Das folgende Lemma zeigt, dass man beliebig nahe an die 1 kommt.

Lemma 2.2.4 (Riesz)**.** *Sei* E *ein normierter Raum und* F *ein abgeschlossener Unterraum. Ist* $F \neq E$ *, so gibt es zu jedem* $\delta > 0$ *ein* $x \in E$ *mit* $\|x\| = 1$ *und*

$$d(x, F) \geq 1 - \delta \; . \tag{2.9}$$

Beweis. Sei $z \in E \setminus F$, $d := d(z, F)$. Dann ist $0 < d < \frac{d}{1-\delta}$. Also gibt es $u \in F$, so dass $\|z - u\| < \frac{d}{1-\delta}$. Setze $x = \|z - u\|^{-1}(z - u)$. Dann ist für $y \in F$

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \|z - u\|^{-1}\|z - (u + \|z - u\|y)\| \\ &\geq \|z - u\|^{-1}d > 1 - \delta \quad \text{da} \end{aligned}$$

$u + \|z-u\|y \in F$. □

Beweis von Satz 2.2.3 $(i) \Rightarrow (ii)$ Das folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass E isomorph zu $\mathbb{K}^N$ ist (siehe Satz 1.5.7).
$(ii) \Rightarrow (i)$ Nehmen wir an, dass die Einheitskugel $B_E := \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ präkompakt ist. Dann gibt es $x_1, \ldots x_N \in B_E$, so dass $B_E \subset \bigcup\limits_{j=1}^{N} B(x_j, \frac{1}{2})$. Sei $F = lin\{x_1, \ldots x_N\}$. Da $\dim F < \infty$, ist F nach Satz 2.2.2(b) abgeschlossen in E . Angenommen, $E \neq F$. Nach Lemma 2.2.4 gibt es dann $x \in B_E$ so dass $d(x, F) > \frac{1}{2}$. Insbesondere ist $\|x - x_j\| > \frac{1}{2}$ für $j = 1, \ldots N$. Damit ist $x \notin B(x_j, \frac{1}{2})$ für $j = 1 \ldots N$, ein Widerspruch. □

Da auf $\mathbb{K}^N$ je zwei Normen äquivalent sind, werden wir im Folgenden die Norm nicht mehr spezifizieren. Jede lineare Abbildung $T : \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^M$ ist durch eine Matrix gegeben und damit stetig (da ja Konvergenz von Folgen in $\mathbb{K}^N$ koordinatenweise Konvergenz bedeutet). Allgemeiner gilt Folgendes:

Satz 2.2.5. *Seien E , F normierte Räume. Ist $\dim E < \infty$, so ist jede lineare Abbildung von E nach F stetig.*

Beweis. Sei etwa $\dim E = N < \infty$. Dann ist $G =$ Bild T ein endlich-dimensionaler Teilraum von F . Da E isomorph zu $\mathbb{K}^N$ und G isomorph zu $\mathbb{K}^M$ ist, folgt aus der Vorbemerkung, dass T stetig als Abbildung von E nach G ist. □

Umgekehrt gibt es auf jedem unendlich-dimensionalen normierten Vektorraum unstetige Linearformen.

Satz 2.2.6. *Sei E ein normierter Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit $\dim E = \infty$. Dann existiert eine unstetige lineare Abbildung $\varphi : E \to \mathbb{K}$.*

Beweis. Sei $\{b_i : i \in I\}$ eine Vektorraumbasis, so dass $\|b_i\| = 1 \quad (i \in I)$. Wähle $J = \{i_1, i_2, \ldots\} \subset I$ abzählbar.
Definiere $\varphi : E \to \mathbb{K}$ durch $\varphi(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} k x_{i_k}$ für $x = \sum\limits_{i \in I} x_i b_i$ (wobei fast alle $x_i = 0$ sind). Dann ist $\varphi(b_{i_k}) = k$. Also ist φ unbeschränkt. □

Aufgabe 2.2.7. *Sei* E *ein normierter Raum dessen Einheitskugel* B *quasikompakt ist, und somit von endlich vielen Kugeln* $B(x_j, 1/2)$, $j = 1, \dots, N$ *überdeckt wird. Sei* $F = lin\{x_1, \dots, x_n\}$.

a) Zeige: $B \subset F + 1/2B$.

b) Folgere: $B \subset F + 2^{-n}B \quad (n \in \mathbb{N})$.

c) Folgere: $B \subset \overline{F} = F$ *und somit*

d) $E = linB = F$.

2.3 Starke Konvergenz von Operatoren

Seien E, F normierte Vektorräume über $\mathbb{K}$.

Definition 2.3.1. *Seien* $T_n, T \in \mathcal{L}(E,F)$ $(n \in \mathbb{N})$. *Wir sagen, die Folge* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert stark** *gegen* T *und schreiben* $T = s-\lim\limits_{n\to\infty} T_n$ *falls*

$$Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$$

für alle $x \in E$. *Die Folge* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt* **stark konvergent** *falls es* $S \in \mathcal{L}(E,F)$ *gibt, derart dass*

$$s-\lim_{n\to\infty} T_n = S \ .$$

Die starke Konvergenz von Operatoren ist also dasselbe wie die punktweise Konvergenz. Sie ist schwächer als die Konvergenz in der Norm. Wir werden aber später noch einen schwächeren Konvergenzbegriff kennenlernen (für den dann der Name schwache Operatorkonvergenz bereit steht).

Das folgende Beispiel zeigt, dass starke Konvergenz schwächer als Konvergenz in der Operatornorm ist.

Beispiel 2.3.2. *Sei* $E = c_0$ *und* $g_n \in c_0$, $\|g_n\| = 1$. *Definiere* $T_n \in \mathcal{L}(E)$ *durch* $T_n x = x_n g_n$. *Dann gilt* $\|T_n\| = 1 \quad (n \in \mathbb{N})$ *aber* $s-\lim\limits_{n\to\infty} T_n = 0$.

Ist eine Folge von Operatoren beschränkt, so reicht es, Konvergenz auf einem dichten Teilraum nachzuweisen, um starke Konvergenz der Folge nachzuweisen. Das zeigt der folgende einfache Satz.

Er zeigt, dass für beschränkte Folgen starke (d.h. punktweise) Konvergenz schon gleichmäßige Konvergenz auf jedem Kompaktum impliziert. Jedoch folgt daraus nicht Konvergenz in der Norm, d.h. gleichmäßige Konvergenz auf der Einheitskugel (die ja im unendlich-dimensionalen Raum nicht kompakt ist). Im übrigen sieht man leicht, dass für eine Folge in $\mathcal{L}(E,F)$ Beschränktheit äquivalent zu Gleichstetigkeit ist. Der folgende Satz ist somit ein Analogon zu Satz 1.6.5.

Satz 2.3.3. *Seien* $T_n, T \in \mathcal{L}(E,F)$ *, so dass*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty \ .$$

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Es gibt einen dichten Teilraum E_0 *von* E *, so dass* $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x = Tx$ *für alle* $x \in E_0$ *;*

(ii) $s - \lim T_n = T$ *;*

(iii) für jede präkompakte Teilmenge K *von* E *konvergiert* $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ *gleichmäßig in* $x \in K$ *gegen* Tx *.*

Beweis. Es ist $(i) \Rightarrow (iii)$ zu zeigen. Sei $\|T\|, \|T_n\| \le M \quad (n \in \mathbb{N})$. Sei $K \subset E$ präkompakt. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $0 < \varepsilon'$ so dass $(4M+1)\varepsilon' < \varepsilon$. Es gibt $x_1, \cdots, x_m \in E$, so dass $K \subset \bigcup\limits_{j=1}^{m} B(x_j, \varepsilon')$. Wähle $y_j \in E_0 \cap B(x_j,\ \varepsilon'), j = 1, \cdots, m$. Nach Voraussetzung (i) gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \ge n_0$ und alle $j \in \{1, \cdots, m\}$ gilt $\|T_n y_j - Ty_j\| \le \varepsilon'$. Sei nun $x \in K$. Wähle $j \in \{1, \cdots, m\}$ so dass $\|x - x_j\| < \varepsilon'$. Dann ist für $n \ge n_0$,

$$\begin{aligned}
\|Tx - T_n x\| &\le \|Tx - Tx_j\| + \|Tx_j - Ty_j\| + \|Ty_j - T_n y_j\| + \\
&\quad \|T_n y_j - T_n x_j\| + \|T_n x_j - T_n x\| \\
&\le M\|x - x_j\| + M\|x_j - y_j\| + \varepsilon' + \\
&\quad M\|y_j - x_j\| + \|T_n\|\|x_j - x\| \\
&\le (4M+1)\varepsilon' < \varepsilon \ .
\end{aligned}$$

□

Ist F vollständig, so reicht es nachzuweisen, dass $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist für alle x aus einem dichten Unterraum.

Korollar 2.3.4. *Sei F vollständig. Seien $T_n \in \mathcal{L}(E,F)$ so dass $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$. Es gebe einen dichten Teilraum E_0 von E so dass $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge bildet für alle $x \in E_0$. Dann gibt es $T \in \mathcal{L}(E,F)$ so dass die äquivalenten Bedingungen (i), (ii) und (iii) im Satz 2.3.3 gelten.*

Beweis. Sei $\|T_n\| \le M \quad (n \in \mathbb{N})$. Sei $x \in E$. Wir zeigen, dass $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge bildet. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $y \in E_0$, so dass $\|x-y\| \le \varepsilon$. Es gibt $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $\|T_n y - T_m y\| \le \varepsilon$, wenn $n, m \ge n_0$. Damit ist für $n, m \ge n_0$,

$$\begin{aligned}
\|T_n x - T_m x\| &\le \|T_n x - T_n y\| + \|T_n y - T_m y\| + \|T_m y - T_m x\| \\
&\le M\|x-y\| + \varepsilon + M\|y-x\| \\
&\le (2M+1)\varepsilon \ .
\end{aligned}$$

Das beweist die Behauptung. Definiere nun $Tx = \lim\limits_{n\to\infty} \|T_n x\|$ für alle $x \in E$. Dann ist $T \in \mathcal{L}(E,F), \|T\| \le M$. Die Aussage folgt jetzt aus Satz 2.3.3. $\square$

Ist der Urbildraum E vollständig, so folgt die Beschränktheit in der Operatornorm automatisch aus der punktweisen Beschränktheit. Dieses erstaunliche und wichtige Phänomen ist eine Konsequenz des Satzes von Baire. Er wurde in Abschnitt 1.7 aus dem Satz von Mittag-Leffler hergeleitet. Hier geben wir einen direkten Beweis.

Wie schon vorher bezeichnen wir mit $B(x,\varepsilon) := \{y \in E : \|x-y\| < \varepsilon\}$ die offene und mit $\bar{B}(x,\varepsilon) := \{y \in E : \|x-y\| \le \varepsilon\}$ die abgeschlossene Kugel mit Mittelpunkt $x \in E$ und Radius $\varepsilon > 0$.

Satz 2.3.5 (Baire)**.** *Sei (M,d) ein vollständiger metrischer Raum. Sei $A_k \subset M$ abgeschlossen $(k \in \mathbb{N})$ so dass*

$$M = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \ .$$

Dann gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ so dass $\overset{\circ}{A}_{k_0} \neq \emptyset$.

Beweis. Der Beweis wird durch Kontraposition geführt. Sei A_k abgeschlossen, so dass $\overset{\circ}{A}_k = \emptyset$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

a) Sei $k \in \mathbb{N}$. Ist $O \neq \emptyset$ offen, so gibt es $x \in M, \varepsilon > 0$ so dass

$$\bar{B}(x,\varepsilon) \subset O \setminus A_k \ .$$

Nach unserer Annahme ist nämlich $O \not\subset A_k$, d.h. $O \setminus A_k$ ist offen und nicht leer.

b) Nach a) finden wir $x_1 \in M,\ 0 < \varepsilon_1 \leq 1$ so dass

$$\bar{B}(x_1,\varepsilon_1) \subset M \setminus A_1 \ .$$

Sukzessive Anwendung von a) liefert

$$x_2 \in M,\ 0 < \varepsilon_2 \leq \frac{1}{2} \quad \text{so dass} \quad \bar{B}(x_2,\varepsilon_2) \subset B(x_1,\varepsilon_1) \setminus A_2$$
$$x_k \in M,\ 0 < \varepsilon_k \leq \frac{1}{k} \quad \text{so dass} \quad \bar{B}(x_k,\varepsilon_k) \subset B(x_{k-1},\varepsilon_{k-1}) \setminus A_k$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.
Sei $k \in \mathbb{N}$ fest. Dann ist $x_n \in \bar{B}(x_k,\varepsilon_k)$ für alle $n \geq k$. Also ist für $d(x_n,x_m) \leq d(x_n,x_k) + d(x_k,x_m) \leq 2\varepsilon_k$ für alle $n,m \geq k$. Damit ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Sei $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Sei $k \in \mathbb{N}$. Da $x_n \in \bar{B}(x_k,\varepsilon_k)$ für alle $n \geq k$, ist auch $x \in \bar{B}(x_k,\varepsilon_k) \subset M \setminus A_k$. Also ist $x \in M \setminus \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k$. □

Satz 2.3.6 (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit)**.** *Sei F ein normierter Raum, E ein Banachraum und sei $H \subset \mathcal{L}(E,F)$. Sei H* **punktweise beschränkt***, d.h.*

$$\sup_{T\in H} \|Tx\| < \infty \quad \textit{für alle} \quad x \in E \ .$$

Dann ist H **normbeschränkt***, d.h.*

$$\sup_{T\in H} \|T\| < \infty \ .$$

Beweis. Die Mengen $A_n := \{x \in E : \|Tx\| \leq n \text{ für alle } T \in H\}$ sind abgeschlossen und nach Voraussetzung ist $E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Nach dem Satz von Baire gibt es also ein A_m mit nicht-leerem Inneren. Es gibt also $x \in E$, $\varepsilon > 0$ so dass $\bar{B}(x,\varepsilon) \subset A_m$. Sei $y \in E$, $\|y\| \leq 1$. Dann ist $x + \varepsilon y \in \bar{B}(x,\varepsilon)$. Also gilt $\|T(x+\varepsilon y)\| \leq m$, und, da $x \in A_m$, auch $\|Tx\| \leq m$ für alle $T \in H$. Die Dreiecksungleichung impliziert, dass $\varepsilon\|Ty\| = \|T(x+\varepsilon y) - Tx\| \leq 2m$. Damit ist $\|T\| \leq 2m/\varepsilon$ für alle $T \in H$. □

Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit impliziert insbesondere, dass der starke Limes stetiger Operatoren automatisch stetig ist.

Korollar 2.3.7. *Seien E, F normierte Vektorräume und sei E vollständig. Sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}(E,F)$ derart, dass*

$$Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$$

für alle $x \in E$ existiert. Dann ist $T \in \mathcal{L}(E,F)$.

Beweis. Aus Satz 2.3.6 folgt, dass $M := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$. Damit ist $\|Tx\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \leq M\|x\|$ für alle $x \in E$. □

Als weitere Folgerung erhalten wir die Stetigkeit der Komposition bezüglich der starken Operator-Konvergenz.

Satz 2.3.8. *Seien E, F, G Banachräume, $T_n, T \in \mathcal{L}(E,F)$, $S_n, S \in \mathcal{L}(F,G)$ derart, dass*

$$s-\lim_{n\to\infty} T_n = T \quad \textit{und} \quad s-\lim_{n\to\infty} S_n = S \ .$$

Dann gilt $s-\lim_{n\to\infty} S_n T_n = ST$.

Beweis. Die Operatorfolgen $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind beschränkt nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit. Sei $x \in E$. Dann ist

$$\begin{aligned} &\|S_n T_n x - STx\| \leq \|S_n(T_n x - Tx)\| + \|(S_n - S)Tx\| \\ &\leq \|S_n\| \, \|T_n x - Tx\| + \|(S_n - S)Tx\| \to 0 \quad (n \to \infty) \ . \end{aligned}$$

□

Aufgabe 2.3.9. *a) Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ derart, dass*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \quad \textit{existiert für alle} \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 \ . \ \textit{Zeige:} \ (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1 \ .$$

b) Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\mathbb{K}$ *derart dass*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \quad \textit{existiert für alle} \quad (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1 . \;\; \textit{Zeige:} \;\; (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty .$$

Anleitung: Benutze den Satz von Banach Steinhaus im Zusammenhang mit Aufgabe 8.1a) bzw. b).

Aufgabe 2.3.10. *a) Sei* $K \subset c_0$ *. Zeige:* K *ist genau dann präkompakt, wenn es für alle* $\varepsilon > 0$ *ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *gibt, so dass* $|x_n| \le \varepsilon$ *für alle* $n \ge n_0$ *und alle* $x \in \mathbb{K}$ *.*
Hinweis: Für die Notwendigkeit der Bedingung definiere $\varphi_n \in c_0' = \mathcal{L}(c_0, \mathbb{K})$ *durch* $\varphi_n(x) = x_n$ *. Wende Korollar 2.3.7 an.*
b) Zeige: Eine Menge $K \subset \ell^1$ *ist genau dann präkompakt, wenn sie beschränkt ist und für alle* $\varepsilon > 0$ *ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *existiert, so dass* $\sum\limits_{k\ge n_0} |x_k| \le \varepsilon$ *für alle* $x \in K$ *.*
Anleitung: *Wende Satz 2.4.2 auf* $\varphi_n \in (\ell^1)'$ *an mit* $\varphi_n(x) = \sum\limits_{k=n}^{\infty} x_k$ *.*

Aufgabe 2.3.11. (Individuelle Wachstumsschranke impliziert gleichmäßige Wachstumsschranke. *Seien* E, F *normierte Vektorräume, wobei* E *vollständig ist.*
a) Sei $H \subset \mathcal{L}(E,F)$ *. Gegeben sei eine Folge von Funktionen* $\rho_k : H \to \mathbb{R}_+ (k \in \mathbb{N})$ *. Für alle* $x \in E$ *gebe es ein* $M \ge 0$, $k \in \mathbb{N}$ *derart dass* $\|Tx\| \le M p_k(T)$ *für alle* $T \in H$ *.*
Zeige: *Es gibt* $M \ge 0$, $k \in \mathbb{N}$ *, so dass*

$$\|T\| \le M p_k(T) \quad \textit{für alle} \quad T \in H .$$

b) Sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(E,F)$ *. Zu jedem* $x \in E$ *gebe es* $k \in \mathbb{N}, M \ge 0$ *derart, dass* $\|T_n x\| \le M n^k$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *.*
Zeige *Die Folge* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist* **polynomial beschränkt**, *d.h. es gibt* $k \in \mathbb{N}, M \ge 0$ *derart, dass*

$$\|T_n\| \le M n^k \quad \textit{für alle} \quad n \in \mathbb{N} .$$

c) Sei $T : [0,\infty) \to \mathcal{L}(E,F)$ *eine Abbildung. Für alle* $x \in E$ *gebe es* $\varepsilon > 0$, $M \ge 0$ *derart, dass* $\|T(t)x\| \le M e^{-\varepsilon t} \quad (t \ge 0)$ *.*
Zeige: *Es gibt* $\varepsilon > 0$, $M \ge 0$ *, so dass*

$$\|T(t)\| \le M e^{-\varepsilon t} \quad (t \ge 0) ,$$

d.h. T **konvergiert exponentiell** *gegen* 0 *.*

Aufgabe 2.3.12. *Sei* $c_{00} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *: es gibt* $n_0 \in \mathbb{N}$ *so dass* $x_n = 0$ *für alle* $n \ge n_0\}$ *der Vektorraum aller Folgen mit endlichem Träger versehen mit der Supremumnorm. Gib eine Folge* $(T_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(c_{00})$ *an, so dass* $s - \lim\limits_{m\to\infty} T_m = 0$ *aber* $\sup\limits_{m\in\mathbb{N}} \|T_m\| = \infty$ *.*
Widerspricht das Korollar 2.3.7?

2.4 Der Satz vom stetigen Inversen

Ein erstaunliches Phänomen ist die automatische Stetigkeit der Inversen einer bijektiven stetigen linearen Abbildung zwischen Banachräumen. Wir beweisen zunächst folgenden Hilfssatz.

Lemma 2.4.1. *Seien* E, F *Banachräume,* $T \in \mathcal{L}(E, F)$ *und* $r > 0$. *Gilt*

$$B(0, 2r) \subset \overline{TB(0,1)} \,, \tag{2.10}$$

so ist $B(0, r) \subset TB(0,1)$.

Hier ist wie zuvor $B(x, r) = \{y \in E : \|x - y\| < r\}$ die offene Kugel mit Mittelpunkt x und Radius $r > 0$ in E . Wir benutzen die gleiche Bezeichnung für Kugeln in F .

Beweis. Aus (2.10) folgt, dass $B(0, 2\varepsilon r) \subset \overline{TB(0, \varepsilon)}$ für alle $\varepsilon > 0$. Insbesondere ist

$$B(0, 2^{-m} r) \subset \overline{TB(0, 2^{-(m+1)})} \quad (m \in \mathbb{N}_0) \,. \tag{2.11}$$

Sei $y \in F$, so dass $\|y\| < r$. Wir konstruieren induktiv $z_n \in E$, so dass $\|z_n\| < 2^{-n}$ und

$$\|y - T(z_1 + \ldots + z_n)\| < \frac{r}{2^n} \,.$$

Sei $n = 1$. Nach (2.11) (für $m = 0$) gibt es $z_1 \in E$, $\|z_1\| < \frac{1}{2}$, so dass $\|y - Tz_1\| < \frac{r}{2}$.
Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $z_1, \ldots z_n$ konstruiert. Aussage (2.11) liefert $z_{n+1} \in E$ mit $\|z_{n+1}\| < 2^{-(n+1)}$ so dass

$$\|(y - T(z_1 + \ldots + z_n)) - Tz_{n+1}\| < \frac{r}{2^{n+1}} \,.$$

Damit ist die Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konstruiert.
Sei $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$. Dann ist $\|x\| < 1$ und $\|y - Tx\| = \lim\limits_{n \to \infty} \|y - \sum\limits_{i=1}^{n} Tz_i\| = 0$.
Also ist $Tx = y$. □

Sind $A, B \subset E$, $\lambda \in \mathbb{K}$ so setzen wir

$$\begin{aligned} A + B &= \{a + b \,,\, a \in A \,,\, b \in B\} \,, \\ A - B &= \{a - b \,,\, a \in A \,,\, b \in B\} \,, \\ \lambda A &= \{\lambda a \,:\, a \in A\} \,. \end{aligned}$$

Satz 2.4.2. *Seien* E, F *Banachräume und sei* $T \in \mathcal{L}(E,F)$ *surjektiv. Dann gibt es* $r > 0$ *, so dass* $B(0,r) \subset TB(0,1)$ *.*

Beweis. Da T surjektiv ist, ist $F = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} n\overline{TB(0,1)}$. Aus dem Satz von Baire folgt, dass $\overline{TB(0,1)}$ nicht leeres Inneres hat. Damit gibt es $y_0 \in F, r > 0$, so dass $B(y_0, 2r) \subset \overline{TB(0,1)}$. Folglich ist $B(0,2r) \subset \overline{TB(0,1)}$. Sei nämlich $y \in F, \|y\| < 2r$. Dann ist $2y = y_0 + y - (y_0 - y) \subset \overline{TB(0,1)} - \overline{TB(0,1)} \subset 2\overline{TB(0,1)}$. Nun folgt aus Lemma 2.4.1, dass $B(0,r) \subset TB(0,1)$. □

Satz 2.4.2 liefert uns schließlich:

Theorem 2.4.3 (Satz vom stetigen Inversen)**.** *Seien* E, F *Banachräume, und sei* $T \in \mathcal{L}(E,F)$ *bijektiv. Dann ist* $T^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$ *.*

Beweis. Wir benutzen Satz 2.4.2. Sei $y \in F$, $\|y\| < r$. Dann ist $y = Tx$ für ein $x \in B(0,1)$. Also ist $\|T^{-1}y\| = \|x\| < 1$. Wir haben gezeigt, dass $T^{-1}B(0,r) \subset B(0,1)$. Daraus folgt $T^{-1}B(0,1) \subset B(0,\frac{1}{r})$ und somit $\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{r}$. □

Korollar 2.4.4 (Äquivalenz von Normen)**.** *Sei* E *ein Vektorraum, der bzgl. zweier Normen* $\| \ \|_1$ *und* $\| \ \|_2$ *vollständig ist. Es gebe* $\alpha > 0$ *so dass* $\|x\|_1 \leq \alpha \|x\|_2 \quad (x \in E)$ *. Dann sind beide Normen äquivalent.*

Als Folgerung erhalten wir einen zweiten wichtigen Satz.

Satz 2.4.5 (Satz vom abgeschlossenen Graphen)**.** *Seien* E, F *Banach räume und sei* $T : E \to F$ *linear. Es gelte*

$$[\lim_{n\to\infty} x_n = x\,,\ \lim_{n\to\infty} Tx_n = y] \ \Rightarrow\ Tx = y\,. \tag{2.12}$$

Dann ist T *stetig.*

Bemerkung 2.4.6. $E \times F$ ist ein Banachraum bzgl. der Norm $\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|$. Mit $G(T) := \{(x,Tx) : x \in E\}$ bezeichnen wir den **Graphen**

von T **.** Aussage (2.12) besagt gerade, dass $G(T)$ abgeschlossen in $E \times F$ ist.

Beweis. Die Abbildung $\phi : G(T) \to E$, $(x, Tx) \mapsto x$ ist stetig und bijektiv. Damit ist die inverse Abbildung $\phi^{-1} : x \mapsto (x, Tx)$ stetig. Folglich ist auch T stetig. □

Der Satz vom abgeschlossenen Graphen vereinfacht den Nachweis von Stetigkeit außerordentlich: Die Stetigkeit einer linearen Abbildung $T : E \to F$ bedeutet, dass aus der Konvergenz von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x zwei Dinge folgen: a) die Konvergenz von $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Vektor y und b) die Identität $y = Tx$. Der Satz vom abgeschlossenen Graphen besagt, dass zum Nachweis der Stetigkeit a) vorausgesetzt werden kann und lediglich die Identität $Tx = y$ nachgewiesen werden muß.

Als nächstes formulieren wir Satz 2.4.2 in einer topologischen Form, die manchmal nützlich ist. Eine Abbildung $f : M_1 \to M_2$ zwischen metrischen Räumen heißt **offen**, falls sie offene Mengen auf offene Mengen abbildet.

Theorem 2.4.7 (Satz von der offenen Abbildung)**.** *Seien* E, F *Banachräume,* $T \in \mathcal{L}(E, F)$ *surjektiv. Dann ist* T *offen.*

Beweis. Sei $O \subset E$. Wir müssen zeigen, dass TO offen ist. Sei $x \in O$. Dann gibt es $\varepsilon > 0$, so dass $B(x, \varepsilon) \subset O$. Nach Satz 2.4.2 ist für geeignetes $r > 0$, $B(0, r) \subset TB(0, \varepsilon)$. Damit gilt $B(Tx, r) = Tx + B(0, r) \subset Tx + TB(0, \varepsilon) = T(x + B(0, \varepsilon)) \subset TO$. □

Schließlich zeigen wir, dass auch die surjektiven Operatoren eine offene Teilmenge von $\mathcal{L}(E, F)$ bilden. Der Beweis beruht auf einer ähnlichen Iteration wie der von Lemma 2.4.1

Satz 2.4.8. *Seien* E *und* F *Banachräume. Dann ist die Menge*

$$\{T \in \mathcal{L}(E, F) : T \text{ ist surjektiv}\}$$

offen in $\mathcal{L}(E, F)$.

Beweis. Sei $T \in \mathcal{L}(E,F)$ surjektiv. Dann gibt es wegen Satz 2.4.2 ein $\varrho > 0$, so dass

$$B(0,1) \subset TB(0,\varrho) \ . \tag{2.13}$$

Wähle $\varepsilon > 0$ so dass $\varrho\varepsilon < \frac{1}{2}$. Sei $S \in \mathcal{L}(E,F)$ so dass $\|T-S\| < \varepsilon$. Wir zeigen, dass S surjektiv ist. Sei $y \in F, \|y\| < 1$. Wegen (2.13) gibt es $x_0 \in B(0,\varrho)$ so dass $Tx_0 = y$. Wir konstruieren induktiv $x_k \in B(0,\varrho 2^{-k})$, so dass

$$(T-S)x_k = Tx_{k+1} \quad (k = 0,1,\ldots) \ .$$

Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Seien $x_0, x_1, \ldots, x_k$ konstruiert. Aus (2.4) folgt, dass

$$B(0,2^{-k-1}) \subset TB(0,\varrho \cdot 2^{k-1}) \ . \tag{2.14}$$

Da $\|(T-S)x_k\| \le \varepsilon \|x_k\| \le \varepsilon\varrho 2^{-k} < 2^{-k-1}$ gibt es wegen (2.5) ein $x_{k+1} \in B(0,\varrho \cdot 2^{-k-1})$ so dass $(T-S)x_k = Tx_{k+1}$. Setze $x := \sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$. Dann ist $Tx - Sx = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(T-S)x_k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} Tx_{k+1} = Tx - Tx_0 = Tx - y$. Somit ist $Sx = y$. □

In diesem Abschnitt haben wir einige bemerkenswerte Aussagen über das Lösen von Gleichungen erhalten. Seien E und F Banachräume, und sei $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Wir wollen das Problem

$$Tx = y \tag{P}$$

lösen. Dabei ist $y \in F$ gegeben und $x \in E$ ist gesucht. Die Abbildung T ist genau dann injektiv, wenn die Gleichung zu jedem y höchstens eine Lösung hat (**Eindeutigkeit**). Sie ist surjektiv, wenn es zu jedem y mindestens eine Lösung gibt (**Existenz**). Man hat genau dann Existenz und Eindeutigkeit, wenn der Operator T bijektiv ist. Der Satz vom stetigen Inversen liefert aber noch mehr: die Lösungen hängen stetig von den Eingangsdaten y ab: Konvergiert y_n gegen y in F $(n \to \infty)$ so konvergieren die Lösungen x_n von $Tx_n = y_n$ gegen die Lösung x von $Tx = y$. Damit ist das Problem **wohlgestellt** im Sinne von Hadamard: Man hat Existenz und Eindeutigkeit sowie stetige Abhängigkeit von den Eingangsdaten. In der Aufgabe 2.1.11 wurde gezeigt, dass die Menge der bijektiven Operatoren offen in $\mathcal{L}(E,F)$ ist. Für unser Problem bedeutet dies, dass Wohlgestelltheit von (P) stabil bzgl. kleiner Störungen ist: Ist (P) wohlgestellt, so gibt es $\varepsilon > 0$, so dass (P) wohlgestellt bleibt, wenn T durch $T+S$ ersetzt wird, wobei $S \in \mathcal{L}(E,F)$ mit $\|S\| < \varepsilon$. Schließlich sagt der Satz 2.4.8, dass auch die Eigenschaft dass für alle $y \in F$ eine Lösung x existiert (die nicht notwendig eindeutig ist) stabil unter kleinen Störungen ist.

Aufgabe 2.4.9. *Sei E ein Vektorraum, der bezüglich zweier Normen $\| \ \|_1$ und $\| \ \|_2$ vollständig ist. Es gebe einen metrischen Raum M und eine injektive Abbildung $j : E \to M$, die bzgl. $\| \ \|_1$ und $\| \ \|_2$ stetig ist. Zeige, dass die beiden Normen äquivalent sind. Anmerkung: Die Aussage bleibt richtig, wenn M ein topologischer Hausdorffraum ist.*

Aufgabe 2.4.10. *Zeige, dass die Menge der injektiven Operatoren nicht offen in $\mathcal{L}(c_0)$ ist.*
Anleitung: *Definiere $T_n \in \mathcal{L}(c_0)$ durch*

$$(T_n x)_k = \begin{cases} \frac{1}{k} x_k & \text{wenn } k \le n \\ 0 & \text{wenn } k > n \ . \end{cases}$$

Zeige, dass T_n gegen einen injektiven Operator konvergiert.

Aufgabe 2.4.11. *Seien E, F Banachräume.*
a) Sei $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Zeige, dass T genau dann injektiv ist und abgeschlossenes Bild hat, wenn es ein $c > 0$ gibt, derart dass

$$\|Tx\| \ge c\|x\| \quad (x \in E) \ .$$

b) Zeige, dass die Menge

$$\{T \in \mathcal{L}(E,F) : T \text{ ist injektiv, } TE \text{ abgeschlossen}\}$$

offen in $\mathcal{L}(E,F)$ ist.

2.5 Quotientenräume und Projektionen

Sei E ein normierter Vektorraum und F ein abgeschlossener Teilraum. Mit E/F bezeichnen wir den Quotientenraum und mit $q : E \to E/F$ die Quotientenabbildung. Dann definiert

$$\|q(x)\| = d(x,F) = \inf\{\|x-y\| : y \in F\} \tag{2.1}$$

eine Norm auf E,F . Bezüglich dieser Norm gilt $\|q(x)\| \le \|x\| \quad (x \in E)$, somit ist $q \in \mathcal{L}(E, F/F)$.

Satz 2.5.1. *Ist* E *ein Banachraum, so ist auch* E/F *ein Banachraum.*

Beweis. Sei $x_n \in E$, so dass $\sum_{n=1}^{\infty} \|q(x_n)\| < \infty$. Wir müssen zeigen, dass $\sum_{n=1}^{\infty} q(x_n)$ konvergiert. Es gibt $y_n \in F$ so dass $\|x_n - y_n\| \leq \|q(x_n)\| + 2^{-n}$. Damit ist $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\| < \infty$. Sei $z = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} (x_n - y_n)$. Dann ist wegen der Stetigkeit von q, $q(z) = \sum_{n=1}^{\infty} q(x_n)$. □

Satz 2.5.2. *Sei* E *ein Banachraum. Sei* P *eine Projektion mit Bild* F *und Kern* G. *Dann ist* P *stetig genau dann wenn* F *und* G *abgeschlossen sind.*

Beweis. Ist P stetig, so sind $F =$ kern $(I - P)$ und $G = \text{Kern}\, P$ abgeschlossen. Seien umgekehrt F und G abgeschlossen. Wir zeigen, dass P einen abgeschlossenen Graphen hat. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} Px_n = y$. Dann ist $y \in F$, da F abgeschlossen ist. Ferner ist $x - y = \lim_{n\to\infty}(x_n - Px_n) \in G$, da G abgeschlossen ist. Da $x = y + (x - y) \in F \oplus G$, ist $y = Px$. Das war zu zeigen. Nach Satz 2.4.4 ist also P stetig.

□

Aufgabe 2.5.3. *Sei* E *ein normierter Vektorraum und* F *ein abgeschlossener Unterraum von* E, *so dass* $F \neq E$. *Betrachte die Quotientenabbildung* $q : E \to E/F$.

(a) *Zeige, dass das Bild der offenen Einheitskugel unter* q *die offene Einheitskugel ist. Insbesondere ist* q *offen.*

(b) *Zeige, dass* $\|q\| = 1$.

Hinweis: Benutze das Lemma von Riesz.

Kapitel 3

Der Satz von Hahn-Banach und seine Konsequenzen

Die Fortsetzungssätze von Hahn-Banach erlauben es, die wichtige Dualitätstheorie und neue analytische Hilfsmittel wie z.B. die schwache Konvergenz zu entwickeln. Einige Anwendungen, wie z.B. die Theorie der vektor-wertigen analytischen Funktionen, werden gegeben.

3.1 Der Fortsetzungssatz von Hahn-Banach

In diesem Abschnitt beweisen wir mehrere Fortsetzungssätze (die in der Literatur alle den Namen Hahn-Banach tragen). Sie gehen alle auf einen rein algebraischen Satz (Theorem 3.1.2) zurück. Sein Beweis beruht auf dem Zorn'schen Lemma, dessen Aussage wir kurz wiederholen.

Sei $(M \preceq)$ eine **partiell geordnete Menge**, d.h. $\preceq$ ist eine Relation mit den beiden Eigenschaften

(3.1) $$x \preceq x \quad \text{für alle} \quad x \in M \quad \textbf{(Reflexivität)} \quad \text{und}$$

(3.2) $$x \preceq y \quad \text{und} \quad x \preceq z \Rightarrow x \preceq z \quad \textbf{(Transitivität)}\,.$$

Eine Teilmenge K von M heißt **total geordnet**, falls für alle $a, b \in K$, $a \preceq b$ oder $b \preceq a$ gilt. Ein Element S von M heißt **obere Schranke** der Teilmenge K , falls

$$k \preceq s \quad \text{für alle} \quad k \in K \; .$$

Die partiell geordnete Menge $(M \preceq)$ heißt **induktiv geordnet**, falls jede total geordnete Teilmenge K von M eine obere Schranke besitzt. Ein Element $m \in M$ heißt **maximal**, falls für alle $x \in M$, $m \preceq x$ impliziert , dass $m = x$.

Lemma von Zorn: Sei $(M \preceq)$ induktiv geordnet und nicht leer. Dann besitzt M ein maximales Element.

Das Lemma von Zorn ist Teil der Mengenlehre, die allgemein akzeptiert wird.

Bemerkung 3.1.1 (Basis eines Vektorraums)**.** Mit Hilfe des Lemmas von Zorn sieht man, dass jeder Vektorraum E eine Basis besitzt: Eine Menge $B \subset E$ heißt **linear unabhängig**, falls für alle $n \in \mathbb{N}$, $b_1, \ldots, b_n \in B$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_j = 0$ impliziert, dass $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. Es ist klar, dass die Menge $M = \{B \subset E : B \text{ linear unabhängig}\}$ bzgl. der Inklusion induktiv geordnet ist. Sei B ein maximales Element von M . Dann ist $\text{lin} B = M$. Wäre nämlich $x \in M \setminus \text{lin } B$, so wäre auch $B \cup \{x\}$ linear unabhängig, ein Widerspruch zur Maximalität. $\square$

Sei E ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $p : E \to \mathbb{R}$ heißt **sublinear**, falls

$$p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \text{für alle} \quad \lambda \geq 0 \, , \, x \in E \quad \text{und} \tag{3.3}$$

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \text{für alle} \quad x, y \in E \; . \tag{3.4}$$

Der folgende Fortsetzungssatz von Hahn-Banach ist rein algebraischer Natur.

Theorem 3.1.2 (Fortsetzungssatz von Hahn-Banach)**.** *Sei* E *ein reeller Vektorraum und sei* F *ein Untervektorraum von* F *. Sei* $p : E \to \mathbb{R}$ *sublinear. Ist* $\varphi : F \to \mathbb{R}$ *linear, so dass* $\varphi(x) \leq p(x)$ *für alle* $x \in F$ *, so besitzt* φ *eine lineare Fortsetzung* $\phi : E \to \mathbb{R}$ *derart, dass*

$$\phi(x) \leq p(x) \quad \textit{für alle} \quad x \in E \; . \tag{3.5}$$

Wir sagen, dass ϕ **von** p **dominiert wird**, *falls (1.5) gilt.*

Beweis. a) Sei $F_1 = F \oplus \mathbb{R}x_0$ wobei $x_0 \in E \setminus F$. Eine lineare Fortsetzung ϕ von φ ist durch

$$\phi(x + \lambda x_0) = \varphi(x) + \alpha\lambda \quad (x \in F\,,\ \lambda \in \mathbb{R})$$

gegeben, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$. Wegen der Homogenität (3.3) von p reicht es, dass (1.5) für Element der Form $x \pm x_0$, $x \in F$ erfüllt ist; d.h. (1.5) ist äquivalent zu folgenden Ungleichungen:

$$\varphi(x) + \alpha \le p(x + x_0) \quad \text{für alle} \quad x \in F \tag{3.6}$$

$$\varphi(y) - \alpha \le p(y - x_0) \quad \text{für alle} \quad y \in F\,. \tag{3.7}$$

Es muß also gelten

$$\varphi(y) - p(y - x_0) \le \alpha \le (p(x + x_0) - \varphi(x) \tag{3.8}$$

für alle $x, y \in F$. Da φ von p dominiert wird, ist aber $\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x + x_0) + \varphi(y - x_0) \le p(x + x_0) + p(y - x_0)$ und damit

$$\varphi(y) - p(y - x_0) \le p(x + x_0) - \varphi(x) \tag{3.9}$$

für alle $x, y \in F$. Damit erfüllt $\alpha := \sup_{y \in F}(\varphi(y) - p(y - x_0))$ die Bedingung (3.8). Damit ist ϕ eine Fortsetzung von φ auf F_1 , die von p dominiert wird.
b) Im allgemeinen Fall betrachten wir die Menge M der Paare (G, ϕ) wobei G ein Unterraum von E ist, der F umfaßt, und $\phi : G \to \mathbb{R}$ eine lineare Fortsetzung von φ auf G ist, die von p dominiert wird. Auf M definieren wir die partielle Ordnung

$$(G_1, \phi_1) \preceq (G_2, \phi_2) \ :\Leftrightarrow\ G_1 \subset G_2\,,\ \phi_{2|G_1} = \phi_1\,.$$

Damit ist M induktiv geordnet. Ist nämlich $\{(G_i, \phi_i) : \in I\} \subset M$ total geordnet, so setzen wir $G = \bigcup_{i \in I} G_i$ und definieren $\phi : G \to \mathbb{R}$ durch $\phi(x) = \phi_i(x)$ wenn $x \in G_i$. Dann ist $(G, \phi) \in M$ eine obere Schranke von K . Nach dem Lemma von Zorn besitzt also M ein maximales Element

(G, ϕ) . Angenommen, $G \neq E$. Dann erlaubt aber a), ein größeres Element zu konstruieren, im Widerspruch zur Maximalität. $\square$

Wir weisen im Folgenden eine komplexe Version des Satzes. Dazu stellen wir zunächst fest, dass $\mathbb{C}$-wertige Linearformen auf einem komplexen Vektorraum eindeutig durch ihren Realteil bestimmt sind:

Lemma 3.1.3. (Komplexe Funktionale). *Sei E ein komplexer Vektorraum.*

(a) Sei $\varphi : E \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-linear . Dann ist $\varphi(x) = \operatorname{Re}\varphi(x) - i \operatorname{Re}\varphi(ix) \quad (x \in E)$.

(b) Sei $f : E \to \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$-linear . Dann definiert $\varphi(x) := f(x) - if(ix)$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $\varphi : E \to \mathbb{C}$.

Beweis. a)Sei $x \in E$. Dann ist $\operatorname{Re}\varphi(ix) + i \operatorname{Im}\varphi(ix) = \varphi(ix) = i\varphi(x) = i \operatorname{Re}\varphi(x) - \operatorname{Im}\varphi(x)$. Also gilt $\operatorname{Im}\varphi(x) = -\operatorname{Re}\varphi(ix)$.
b) Es ist klar, dass φ additiv und $\mathbb{R}$-linear ist. Sei $\lambda = (\xi + i\eta) \in \mathbb{C}$. Dann ist $\varphi(\lambda x) = \varphi(\xi x + i\eta x) = \xi\varphi(x) + \eta\varphi(ix) = \xi f(x) - i\xi f(ix) + \eta f(ix) - i\eta f(-x) = (\xi + i\eta)(f(x) - if(ix)) = \lambda\varphi(x)$. $\square$

Theorem 3.1.4. (Komplexe Version des Fortsetzungssatzes von Hahn-Banach. *Sei E ein komplexer Vektorraum und $p : E \to \mathbb{R}$ sublinear. Sei F ein Unterraum und $\varphi : F \to \mathbb{C}$ linear, so dass $\operatorname{Re}\varphi(x) \leq p(x)$ für alle $x \in F$. Dann besitzt φ eine lineare Fortsetzung $\phi : E \to \mathbb{C}$ so dass*

$$\operatorname{Re}\phi(x) \leq p(x) \quad \textit{für alle} \quad x \in E\ . \tag{3.10}$$

Beweis. Wendet man Satz 3.1.2 auf $\operatorname{Re}\varphi$ an, so findet man $f : E \to \mathbb{R}$ linear so dass $f(x) \leq p(x)$ für alle $x \in E$. Setze $\phi(x) = f(x) - if(ix) \quad (x \in E)$. Dann ist nach Lemma 3.1.3 b) $\phi : E \to \mathbb{C}$ linear und nach Lemma 3.1.3 a) $\phi_{|F} = \varphi$. $\square$

Eine Abbildung $p : E \to \mathbb{R}_+$ heißt **Halbnorm** falls

$$p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \quad (x \in E, \lambda \in \mathbb{K})\ ; \tag{3.11}$$

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad (x, y \in E)\ . \tag{3.12}$$

Jede Halbnorm ist also sublinear. Ist in Theorem 3.1.4 p sogar eine Halbnorm, so erhält man aus (3.10) die stärkere Ungleichung

$$|\phi(x)| \leq p(x) \quad (x \in E)\ . \tag{3.13}$$

Man beachte dazu, dass es zu jedem $z \in \mathbb{C}$ ein $\theta \in \mathbb{R}$ gibt so dass $\operatorname{Re}(e^{i\theta}z) = |z|$. Sei nun $x \in E$. Dann gilt für geeignetes $\theta \in \mathbb{R}$, $|\phi(x)| = \operatorname{Re}(e^{i\theta}\phi(x)) = \operatorname{Re}\phi(e^{i\theta}x) \leq p(e^{i\theta}x) = p(x)$, wobei wir (3.10) und (3.11) benutzt haben.

Als nächstes betrachten wir stetig Fortsetzungen von Funktionalen.

Satz 3.1.5 (Hahn-Banach: Stetige Fortsetzung von Funktionalen)**.** *Sei E ein normierter Vektorraum über $\mathbb{K}$ und F ein Teilraum von F . Sei $\varphi \in F'$. Dann besitzt φ eine Fortsetzung $\phi \in E'$ mit $\|\phi\| = \|\varphi\|$.*

Beweis. Man wende Theorem 3.1.4 auf die Halbnorm $p(x) = \|x\|\,\|\varphi\|$ an. Die Ungleichung (3.13) liefert dann die Behauptung. □

Korollar 3.1.6. *Sei E ein normierter Vektorraum und sei $x \in E$. Dann gibt es $\varphi \in E'$, $\|\varphi\| \leq 1$ so dass $\varphi(x) = \|x\|$.*

Beweis. Wähle $F = \mathbb{K} \cdot x$ und definiere $\varphi \in F'$ durch $\varphi(\lambda x) = \lambda\|x\|$. Die Behauptung folgt aus Satz 3.1.5. □

Korollar 3.1.6 besagt insbesondere, dass die duale Einheitskugel $B_{E'} = \{\varphi \in E' : \|\varphi\| \leq 1\}$ die Norm von E bestimmt, d.h. es gilt

$$\|x\| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x)|\ . \tag{3.14}$$

Insbesondere folgt aus Korollar 3.1.6, dass der Dualraum E' den Raum E **trennt**, d.h. für $x, y \in E$ gilt:

$$\varphi(x) = \varphi(y) \quad \text{für alle} \quad \varphi \in E' \quad \text{impliziert} \quad x = y\ . \tag{3.15}$$

Diese Tatsache kann man sehr oft benutzen um skalare Eigenschaften auf vektorwertige zu übertragen.

Satz 3.1.7. *Seien* E, F *normierte Räume. Sei* $T \in \mathcal{L}(E, F)$ *. Dann gibt es genau einen Operator* $T \in \mathcal{L}(F', E')$ *, so dass*

$$\varphi(Tx) = (T'\varphi)(x)$$

für alle $\varphi \in F'$ *,* $x \in E$ *. Der Operator* T' *heißt die* **Adjungierte** *von* T *. Es gilt*

$$\|T\| = \|T'\| \ .$$

Beweis. Sei $\varphi \in F'$. Setze $T'\varphi = \varphi \circ T$. Die weiteren Eigenschaften folgen leicht aus dem Satz von Hahn-Banach. □

Aufgabe 3.1.8. *Sei* E *ein normierter Vektorraum. Sei* $J \subset \mathbb{R}$ *ein Intervall,* $k \in \mathbb{N}$ $f : J \to E$ *eine Funktion, derart dass* $\varphi \circ f$ *ist* $k+1$*-mal stetig differenzierbar und* $(\varphi \circ f)^{(k+1)}(t) = 0$ *für alle* $t \in J$ *und für alle* $\varphi \in E'$ *.*
Zeige: Es gibt $a_0, a_1, \cdots a_k \in E$ *, so dass*

$$f(t) = \sum_{m=0}^{k} a_m t^m \quad (t \in J) \ .$$

3.2 Projektionen und Quotientenräume

Sei E ein Vektorraum. Seien F und G Untervektorräume von E . Wir sagen, dass E die **direkte Summe** von F und G ist falls

$$F + G = E \text{ und } F \cap G = \{0\} \ .$$

Das bedeutet gerade, dass es zu jedem $x \in E$ genau ein Paar $(u, v) \in F \times G$ gibt, so dass $x = u + v$. Wir schreiben in diesem Fall $E = F \oplus G$. Die Abbildung $P : E \to E$, die jedem $x \in E$ den Vektor $u \in F$ zuordnet, so dass $x - u \in G$, ist linear. Es ist Bild $P = F$ und Kern $P = G$. Ferner ist $P^2 = P$. Wir nennen P **die Projektion von** E **auf** F **entlang** G .
Umgekehrt nennen wir eine lineare Abbildung $P : E \to E$ eine **Projektion**, falls $P^2 = P$. Dann sind Kern P und Bild P Unterräume von E und es ist

$$E = \text{ Bild} P \oplus \text{ Kern} P \ .$$

Jedes $x \in E$ läßt sich nämlich schreiben als $x = Px + (I - P)x$. Die Abbildung P ist damit die Projektion auf Bild P entlang Kern P entsprechend obiger Definition.
Nun wollen wir beschreiben, wann Projektionen stetig sind.

Satz 3.2.1. *Sei E ein Banachraum. Sei P eine Projektion mit Bild $P = F$ und Kern $P = G$. Dann ist P stetig genau dann wenn F und G abgeschlossen sind.*

Beweis. Ist P stetig, so sind $F =$ Kern $(I - P)$ und $G =$ Kern P abgeschlossen. Seien umgekehrt F und G abgeschlossen. Wir zeigen, dass P einen abgeschlossenen Graphen hat. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} Px_n = y$. Dann ist $y \in F$, da F abgeschlossen ist. Ferner ist $x - y = \lim_{n\to\infty}(x_n - Px_n) \in G$, da G abgeschlossen ist. Da $x = y + (x - y) \in F \oplus G$, ist $y = Px$. Das war zu zeigen. Nach Satz 2.4.5 ist also P stetig.

□

Mithilfe des Satzes von Hahn-Banach erhalten wir nun folgendes Ergebnis:

Satz 3.2.2. *Sei E ein normierter Raum und F ein endlich dimensionaler Teilraum. Dann gibt es einen abgeschlossenen Unterraum G von E, so dass*

$$E = F \oplus G . \tag{3.16}$$

Beweis. Sei $\{b_1, \dots b_n\}$ eine Basis von F. Dann gibt es $\varphi_i : F \to \mathbb{K}$ linear, so dass $\varphi_i(b_i) = 1$ und $\varphi_i(b_j) = 0$ wenn $j \neq i$. Da $\dim F < \infty$, ist φ_i stetig. Nach Satz 3.1.5. gibt es $\Phi_i \in E'$ so dass $\Phi_i|_F = \varphi_i$. Insbesondere $\Phi_i(b_i) = 1$, $\Phi_i(b_j) = 0$ für $i \neq j$. Definiere $Px = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(x) b_i$. Dann ist $P \in \mathcal{L}(E)$ eine Projektion und Bild $P = F$. Setze $G = (I - P)E$. □

Bemerkung 3.2.3 (Projezierbare Unterräume)**.** Sei F ein abgeschlossener Teilraum eines Banachraumes E. Man sagt, dass F **projezierbar** ist, falls es eine stetige Projektion $P \in \mathcal{L}(E)$ gibt mit Bild $P = F$. Das ist genau dann der Fall, wenn es einen abgeschlossenen Unterraum G von E gibt, so dass $E = F \oplus G$. Satz 3.2.2 sagt, dass jeder endlichdimensionale Unterraum projezierbar ist. Man kann zeigen, dass c_0 nicht projezierbar als Unterraum von ℓ^∞ ist (siehe [[W], Satz 4.6.4]. Ein berühmtes Beispiel von Gowers und Maurey [GM] zeigt, dass es einen Banachraum E gibt, so dass folgendes gilt: Sind F, G abgeschlossene Unterräume, so dass $E = F \oplus G$, dann gilt $\dim F < \infty$ oder $\dim G < \infty$. Auf der anderen Seite werden wir sehen, dass in Hilberträumen jeder abgeschlossene Unterraum projezierbar ist (siehe Kapitel 5).

Sei E ein normierter Vektorraum und F ein abgeschlossener Teilraum. Mit E/F bezeichnen wir den Quotientenraum und mit $q : E \to E/F$ die Quotientenabbildung. Dann definiert

$$\|q(x)\| = d(x,F) = \inf\{\|x-y\| : y \in F\} \tag{3.17}$$

eine Norm auf E, F . Bezüglich dieser Norm gilt $\|q(x)\| \leq \|x\| \quad (x \in E)$, somit ist $q \in \mathcal{L}(E, F/F)$.

Satz 3.2.4. *Ist E ein Banachraum, so ist auch E/F ein Banachraum.*

Beweis. Sei $x_n \in E$, so dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|q(x_n)\| < \infty$. Wir müssen zeigen, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q(x_n)$ konvergiert. Es gibt $y_n \in F$ so dass $\|x_n - y_n\| \leq \|q(x_n)\| + 2^{-n}$. Damit ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\| < \infty$. Sei $z = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n) = \lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{m}(x_n - y_n)$. Dann ist wegen der Stetigkeit von q , $q(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} q(x_n)$. □

Wenden wir nun den Satz von Hahn-Banach auf Quotientenräume an, so erhalten wir folgendes Resultat.

Korollar 3.2.5. *Sei E ein normierter Vektorraum und $F \subset E$ ein abgeschlossener Unterraum. Sei $x \in E \setminus F$. Dann gibt es $\varphi \in E'$ derart, dass $\varphi = 0$ auf F, $\|\varphi\| = 1$ und $\varphi(x) = d(x,F)$.*

Beweis. Betrachte die Quotientenabbildung $q : E \to E/F$. Nach Korollar 3.1.6 gibt es $\psi \in (E/F)'$ mit $\|\psi\| \leq 1$ und $\psi(q(x)) = \|q(x)\| = d(x,F)$. Setze $\varphi = \psi \circ q$. □

Insbesondere erhalten wir folgendes nützliches Kriterium für Dichtheit:

Korollar 3.2.6. *Sei E ein normierter Raum und F ein Unterraum von E . Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) F *ist dicht in* E ;

(ii) $\varphi \in E',\ \varphi_{|F} = 0 \ \Rightarrow\ \varphi = 0$.

Aufgabe 3.2.7. *Seien* F, G *abgeschlossene Unterräume eines Banachraumes* E *so dass* $E = F \oplus G$ *. Zeige, dass*

$$\|x\|_0 := \|u\| + \|v\|, \quad x = u + v, u \in F, v \in G,$$

eine äquivalente Norm auf E *bildet.*

Aufgabe 3.2.8. *Sei* E *ein normierter Vektorraum und* F *ein abgeschlossener Unterraum von* E *, so dass* $F \neq E$ *. Betrachte die Quotientenabbildung* $q : E \to E/F$ *.*

(a) *Zeige, dass das Bild der offenen Einheitskugel unter* q *die offene Einheitskugel ist. Insbesondere ist* q *offen.*

(b) *Zeige, dass* $\|q\| = 1$ *.*

Hinweis: Benutze das Lemma 2.2.4 von Riesz.

Aufgabe 3.2.9. *Sei* K *ein kompakter metrischer Raum und* $S \subset K$ *abgeschlossen. Wir betrachten den Banachraum* $E = C(K)$ *mit der Supremumsnorm. Dann ist* $F = \{f \in E : f_{|S} = 0\}$ *ein abgeschlossener Unterraum. Zeige dass* E/F *isometrisch isomorph zu* $C(S)$ *ist.*

3.3 Reflexive Räume

Sei E ein normierter Vektorraum. Dann ist der Dualraum E' ein Banachraum, und wir können dessen Dualraum $E'' = (E')'$, den **Bidual** von E , betrachten. Die **Auswertungsabbildung**

$$j : E \to E'' , \ x \mapsto j_x$$

ist definiert durch $j_x(\varphi) = \varphi(x) \quad (\varphi \in E')$. Sie ist linear und nach Korollar 3.1.6 isometrisch, da

$$\|j_x\| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x)| = \|x\| ,$$

wobei $B_{E'}$ die duale Einheitskugel bezeichnet.

Beispiel 3.3.1. Sei $E = c_0$. Dann ist $E' = \ell^1$ und $E'' = \ell^\infty$. Man sieht leicht, dass die Auswertungsabbildung $j : E \to E''$ gerade die Einbettung von c_0 in ℓ^∞ ist.

Da $j : E \to E''$ linear und isometrisch ist, können wir E mit dem Unterraum $j(E)$ von E'' identifizieren. E ist genau dann vollständig, wenn

$j(E)$ in E'' abgeschlossen ist. Ist E nicht vollständig, so können wir $\overline{j(E)}$ als **Vervollständigung** von E betrachten. Das notieren wir als einen Satz.

Satz 3.3.2. *Sei E ein normierter Raum. Dann gibt es einen Banachraum $\hat{E}$, der E als dichten Teilraum enthält. Man nennt ihn die* **Vervollständigung** *von E.*

Definition 3.3.3. *Ein normierter Vektorraum E heißt* **reflexiv***, falls die Auswertungsabbildung $j : E \to E''$ surjektiv ist.*

Da E'' ein Banachraum ist, ist jeder reflexive Raum vollständig.

Bemerkung 3.3.4. Ein berühmtes Beispiel von James zeigt, dass ein Banachraum E isomorph zu seinem Bidual sein kann, auch wenn er nicht reflexiv ist.

Satz 3.3.5. *Ein abgeschlossener Teilraum eines reflexiven Raumes ist reflexiv.*

Beweis. Sei E reflexiv und $F \subset E$ ein abgeschlossener Teilraum von E. Sei $\varphi \in F''$. Definiere $\psi \in E''$ durch $\psi(x') = \varphi(x'_{|F})$ für alle $x' \in E'$. Da E reflexiv ist, gibt es $x_0 \in E$, so dass $\psi(x') = x'(x_0)$, d.h.

$$\varphi(x'_{|F}) = x'(x_0) \quad (x' \in E') . \tag{3.18}$$

Wir zeigen, dass $x_0 \in F$. Andernfalls gibt es nämlich $x' \in E'$, so dass $x'_{|F} = 0$ und $x'(x_0) \neq 0$ (nach Korollar 3.1.9). Das widerspricht aber (3.18). Sei nun $y' \in F'$. Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es $x' \in E'$, so dass $x'_{|F} = y'$. Damit ist nach (3.18), $\varphi(y') = x'(x_0)$. Wir haben gezeigt, dass $\varphi = j_{x_0}$, wobei $j : F \to F''$ die Auswertungsabbildung bezeichnet. □

Satz 3.3.6. *Ein Banachraum E ist genau dann reflexiv, wenn sein Dualraum reflexiv ist.*

Beweis. a) Sei E reflexiv. Wir zeigen, dass E' reflexiv ist. Sei $\phi \in (E'')'$. Zu zeigen ist, dass $x'_0 \in E'$ existiert, so dass $\phi(x'') = x''(x'_0)$ für alle $x'' \in E''$. Setze $x'_0 = \phi \circ j \in E'$, wobei $j : E \to E''$ die Auswertungsabbildung ist. Sei $x'' \in E''$. Da E reflexiv ist, gibt es $x \in E$, so dass $x'' = j(x)$. Damit ist $\phi(x'') = (\phi \circ j)(x) = x'_0(x) = x''(x'_0)$.
b) Sei E' reflexiv. Dann folgt aus a), dass E'' reflexiv ist. Damit ist nach Satz 3.3.5 E reflexiv als abgeschlossener Teilraum von E'' . □

Beispiel 3.3.7. Im Beispiel 3.3.1 hatten wir gesehen, dass c_0 nicht reflexiv ist. Aus Satz 3.3.6 folgt, dass auch $\ell^1 = (c_0)'$ und $\ell^\infty = (\ell^1)'$ nicht reflexiv sind. Da c isomorph zu c_0 ist (siehe Beispiel 2.1.3), ist auch c nicht reflexiv.

Als nächstes betrachten wir eine wichtige Klasse von reflexiven Banachräumen. Sei $1 < p < \infty$. Wir setzen:

$$\ell^p := \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\} .$$

Lemma 3.3.8. *ℓ^p ist ein Vektorraum bzgl. komponentenweiser Addition und Skalar Multiplikation.*

Beweis. Für $x, y \in \ell^p$ gilt $|x_n+y_n|^p \le (|x_n|+|y_n|)^p \le (2\cdot\max\{|x_n| , |y_n|\})^p = 2^p \max\{|x_n|^p , |y_n|^p\} \le 2^p(|x_n|^p + |y_n|^p)$. Daraus folgt die Behauptung. □

Für $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ setzen wir

$$\|x\|_p := (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} .$$

Wir werden zeigen, dass $\| \ \|_p$ eine Norm auf ℓ^p ist. Es ist klar, dass $\|x\|_p = 0$ genau dann, wenn $x = 0$; und $\|\lambda x\|_p = |\lambda| \, \|x\|_p \quad (\lambda \in \mathbb{K}, x \in \ell^p)$. Um die Dreiecksungleichung zu beweisen, benötigen wir etwas Vorbereitung.

Man nennt die Zahl $q \in (1, \infty)$ mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

den zu p **konjugierten Index**. Es gilt

Lemma 3.3.9 (Höldersche Ungleichung)**.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \le \|x\|_p \|y\|_q$$

für $x \in \ell^p$, $y \in \ell^q$ *.*

Beweis. Seien $x \in \ell^p$, $y \in \ell^q$. Wir können annehmen, dass $x, y \neq 0$ (sonst ist die Ungleichung trivial). Ferner können wir annehmen, das $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$ (sonst ersetzen wir x_n durch $\frac{x_n}{\|x\|_p}$ und y_n durch $\frac{y_n}{\|y\|_q}$) . Zu zeigen ist also, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|\,|y_n| \le 1$. Sei $\theta = \frac{1}{p} \in (0,1)$. Dann ist $1 - \theta = \frac{1}{q}$. Der Logarithmus $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist eine konkave Funktion (da $\frac{d^2}{dx^2} \ln x \le 0$) ; d.h. für $a, b > 0$ ist $\theta \ln a + (1-\theta) \ln b \le \ln(\theta a + (1-\theta) b)$, oder durch Exponenzieren,

$$a^\theta b^{1-\theta} \le \theta a + (1-\theta) b \,. \tag{3.19}$$

Damit ist
$$\begin{aligned} |x_n|\,|y_n| &= (|x_n|^p)^\theta \,(|y_n|^q)^{1-\theta} \\ &\le \theta |x_n|^p + (1-\theta)|y_n|^q \,. \end{aligned}$$

Summation ergibt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n||y_n| \le \theta \|x\|_p^p + (1-\theta)\|y\|_q^q = 1$$

da $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$. □

Lemma 3.3.10. *Es gilt* $\|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$ *für alle* $x, y \in \ell^p$ *.*

Beweis. Es ist $(1-p)q = p$. Daher ist $(|x_n + y_n|^{p-1})_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^q$. Aus der

Hölderschen Ungleichung folgt:

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_p^p &= \sum_{n=1}^{\infty} |x_n+y_n| \cdot |x_n+y_n|^{p-1} \\
&\le \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|\,|x_n+y_n|^{p-1} + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|\,|x_n+y_n|^{p-1} \\
&\le \|x\|_p(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n+y_n|^p)\frac{1}{q} + \|y\|_p(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n+y_n|^p)^{\frac{1}{q}} \\
&= (\|x\|_p + \|y\|_p)\ \|x+y\|_p^{p/q}\ .
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung, da $p - \frac{p}{q} = 1$. □

Damit haben wir gezeigt, dass $(\ell^p, \|\ \|_p)$ ein normierter Raum ist.
Mit c_{00} bezeichnen wir den Raum der Folgen mit endlichem Träger; d.h. $c_{00} := \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K} : x_n = 0$ für alle bis auf endlich viele $n\}$. Er liegt dicht in ℓ^p .

Satz 3.3.11. *Sei* $1 < p\,, q < \infty\,, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Der Dualraum von* ℓ^p *ist isometrisch isomorph zu* ℓ^q .

Beweis. Sei $y \in \ell^q$. Aus der Hölderschen Ungleichung folgt, dass

$$\varphi_y(x) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \quad (x \in \ell^p)$$

eine stetige Linearform $\varphi_y \in (\ell^p)'$ definiert und

$$\|\varphi_y\| \le \|y\|_q\ .$$

Offensichtlich ist die Abbildung $\varphi : \ell^q \to (\ell^p)' : y \mapsto \varphi_y$ linear. Es bleibt zu zeigen, dass φ surjektiv und isometrisch ist. Sei $\psi \in (\ell^p)'$. Setze $y_n = \psi(e_n)$. Dann gilt $\psi(x) = \psi(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ wenn $x \in c_{00}$. Wir zeigen, dass $(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q)^{\frac{1}{q}} \le \|\varphi\|$. Sei $n \in \mathbb{N}$. Setze $x = (x_n)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_k = \begin{cases} \frac{\bar{y}_k}{|y_k|}|y_k|^{q-1} & \text{wenn } \ y_k \neq 0 \\ 0 & \text{wenn } \ y_k = 0 \text{ oder } k > n\ . \end{cases}$$

Da $(q-1)\cdot p = q$, ist $\|x\|_p = (\sum\limits_{k=1}^{n} |y_k|^q)^{\frac{1}{p}}$. Also ist

$$\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \psi(x) \leq \|\psi\| \, \|x\|_p = \|\psi\| (\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q)^{\frac{1}{p}} .$$

Daraus erhalten wir

$$(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q)^{\frac{1}{q}} = (\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q)^{1-\frac{1}{p}} \leq \|\psi\| .$$

Da $\psi(x) = \varphi_y(x)$ für alle $x \in c_{00}$ und c_{00} dicht in ℓ^p liegt, gilt $\psi = \varphi_y$. □

Korollar 3.3.12. *Für $1 < p < \infty$ ist $(\ell^p, \| \, \|_p)$ ein reflexiver Banachraum.*

Beweis. Sei $E = \ell^p$ und sei $j : E \to E''$ die Auswertungsabbildung. Sei $x \in E$. Sei $y \in \ell^q$, $\varphi_y \in (\ell^p)'$ wie im Beweis von Satz 3.3.11. Dann ist $j_x(\varphi_y) = \varphi_y(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$. Aus Satz 3.3.11 folgt, dass es für jedes $\psi \in E' = \{\varphi_y : y \in \ell^q\}$ ein $x \in E$ gibt, so dass $\psi = j_x$. Damit ist j surjektiv. □

Aufgabe 3.3.13. *a) Sei $1 \leq p < \infty$, $E = \ell^p$, $T \in \mathcal{L}(E)$. Setze $a_{nm} = (Te_m)_n$, wobei $e_m = (0, 0, \ldots 1, 0 \ldots)$. Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $a_{n\cdot} \in \ell^q$ und somit $(a_{nm} x_m)_{m\in\mathbb{N}} \in \ell^1$, wenn $x \in \ell^p$ (wobei $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$) . Zeige ferner:*

$$(Tx)_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} x_m \quad (n \in \mathbb{N}) . \tag{3.20}$$

Wir nennen (a_{nm}) die zu T gehörende Matrix.
b) Sei $T \in \mathcal{L}(\ell^1)$, $S = T'$. Sei (a_{nm}) die zu T gehörende Matrix. Setze $a'_{nm} = a_{mn}$. Zeige: S hat eine Matrix-Darstellung (3.20) wobei a_{mn} durch a'_{nm} ersetzt ist.

Aufgabe 3.3.14. *Sei $1 \leq p, q \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$, so dass*

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n b_n \quad \text{für alle} \quad x \in \ell^p \text{ existiert} .$$

Zeige: $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^q$.

3.4 Schwache Konvergenz

Sei E ein normierter Raum.

Definition 3.4.1. *Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E* **konvergiert schwach gegen** *$x \in E$, falls $\lim\limits_{n\to\infty} x'(x_n) = x'(x)$ für alle $x' \in E'$.*
Man schreibt: $x_n \rightharpoonup x \ (n \to \infty)$ oder

$$\sigma(E,E') - \lim_{n\to\infty} x_n = x \, .$$

Zunächst bemerkt man, dass der Limes einer schwach konvergenten Folge eindeutig ist, da E' den Raum E trennt. Natürlich impliziert die starke, d.h. die Norm-Konvergenz die schwache Konvergenz. Aber z.B. konvergiert die Folge der Einheitsvektoren $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in c_0 schwach gegen 0 , aber $\|e_n\| = 1 \quad (n \in \mathbb{N})$. Die Norm-Konvergenz ist also echt stärker als die schwache Konvergenz. Dahingegen sind schwache Beschränktheit und Normbeschränktheit dasselbe:

Satz 3.4.2. *Sei $H \subset E$ schwach beschränkt, d.h. $\sup\limits_{x\in H} |x'(x)| < \infty$ für alle $x' \in E$. Dann ist H normbeschränkt. Insbesondere ist jede schwach-konvergente Folge normbeschränkt.*

Beweis. Betrachte die Auswertungsabbildung $j : E \to E''$ und $\tilde{H} = j(H) \subset E'' = \mathcal{L}(E',\mathbb{K})$. Da $\tilde{H}$ punktweise beschränkt ist, folgt aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit, dass $\tilde{H}$ normbeschränkt ist. Da j eine Isometrie ist, ist also auch H normbeschränkt. □

Ähnlich definieren wir einen schwachen Konvergenzbegriff in E' .

Definition 3.4.3. *Eine Folge $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E'* **konvergiert schwach*** *gegen $x' \in E'$, falls $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n(x) = x'(x)$ für alle $x \in E$. Man schreibt auch $x'_n \overset{*}{\rightharpoonup} x'$ oder*

$$\sigma(E',E) - \lim_{n\to\infty} x'_n = x' \, .$$

Hier folgt aus der Definition unmittelbar, dass der Grenzwert eindeutig ist; und direkt aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit folgt, dass schwach*-konvergente Folgen beschränkt sind, falls E vollständig ist. Aus schwacher Konvergenz in E' (also $\sigma(E', E'')$ -Konvergenz) folgt natürlich schwach*-Konvergenz, aber nicht umgekehrt: Wähle $E = c_0$, $e_n \in E' = \ell^1$ die Einheitsvektoren. Dann gilt $\sigma(E', E) - \lim\limits_{n\to\infty} e_n = 0$ aber es ist $< e_n, \mathbb{1} >= 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wobei $\mathbb{1} \in E'' = \ell^\infty$ die Konstant-1-Folge ist.

Aus dem Diagonalfolgen-Prinzip erhalten wir folgenden wichtigen Satz:

Satz 3.4.4. *Sei E ein separabler Banachraum. Dann besitzt jede beschränkte Folge in E' eine schwach*-konvergente Teilfolge.*

Beweis. Sei $\varphi_n \in E'$, $\|\varphi_n\| \leq c$. Sei $\{x_m : m \in \mathbb{N}\}$ dicht in E. Nach dem Diagonalisationsprinzip Lemma 1.6.1 gibt es eine Teilfolge $(\varphi_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_{n_k}(x_m)$ für alle $m \in \mathbb{N}$ existiert. Aus Satz 2.3.3 folgt, dass $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_{n_k}(x) =: \varphi(x)$ für alle $x \in E$ existiert und $\varphi \in E'$. □

Bemerkung 3.4.5. a) Sei E separabel. Dann gibt es eine Metrik auf B'_E, die die Schwach*-Konvergenz definiert. Sei etwa $x_m \in B_E$, so dass $\{x_m : m \in \mathbb{N}\}$ total in E ist. Man definiere

$$d(\varphi, \psi) = \sum_{m=1}^{\infty} \min\{2^{-m} |\varphi(x_m) - \psi(x_m)|\} ,$$

b) Satz 3.4.4 sagt somit, dass B'_E bzgl. der Schwach*-Topologie kompakt ist.
c)Auf dem gesamten Raum E' ist die $\sigma(E', E)$-Topologie nie metrisierbar, wenn $\dim E = \infty$. Das ist eine einfache Konsequenz des Satzes von Baire (siehe [W]). Wir wollen an dieser Stelle aber auf allgemeine topologische Aussagen verzichten.

In reflexiven Räumen gilt Satz 3.4.4 auch für die schwache Konvergenz. Um das zu beweisen benötigen wir folgende Aussage:

Satz 3.4.6. *a) Ist E' separabel, so ist auch E separabel.*
b) Insbesondere ist ein reflexiver Raum genau dann separabel, wenn sein Dualraum es ist.

Beweis. a) Sei $\{x'_n : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in E' . Wähle $x_n \in E$ so dass $\|x_n\| = 1$ und $|x'_n(x_n)| \geq \frac{1}{2}\|x'_n\|$. Dann ist $F = lin\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ dicht. Sei nämlich $\varphi \in E'$ so dass $\varphi_{|F} = 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ so dass $\|\varphi - x'_n\| \leq \varepsilon$. Dann ist $\|\varphi\| \leq \|\varphi - x'_n\| + \|x'_n\| \leq \varepsilon + 2|x'_n(x_n)| = \varepsilon + 2|(x'_n - \varphi)(x_n)| \leq 3\varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt dass $\varphi = 0$. Damit ist F dicht nach Korollar 3.2.6.
b) Folgt direkt aus a). □

Wir hatten gesehen, dass die Einheitskugel in unendlich-dimensionalen Banachräumen nie kompakt ist. Die Bedeutung der schwachen Topologie liegt an dem folgenden wichtigen Satz.

Theorem 3.4.7. *Sei E ein reflexiver Banachraum. Dann hat jede beschränkte Folge in E eine schwach konvergente Teilfolge.*

Beweis. Sei $x_n \in E$, $\|x_n\| \leq c \quad (n \in \mathbb{N})$. Der Raum $F = \overline{lin}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist separabel und reflexiv nach Satz 3.3.5. Damit folgt aus Satz 3.4.6, dass auch F' separabel ist. Da $F'' = F$ folgt nun die Behauptung aus Satz 3.4.4, angewandt auf F' . □

Bemerkung 3.4.8. Ist E separabel oder reflexiv, so besitzt jede beschränkte Folge in E' eine schwach*-konvergente Teilfolge. Im allgemeinen ist dies jedoch falsch. Hier ist ein Beispiel:
Sei $\varphi_n \in (\ell^\infty)'$ gegeben durch $\varphi_n(x) = x_n$. Sei $(\varphi_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Teilfolge von $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Definiere

$$x_n = \begin{cases} (-1)^k & \text{wenn} \quad n = n_k \\ 0 & \text{wenn} \quad n \notin \{n_k : k \in \mathbb{N}\} \end{cases}$$

Dann ist $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ und $\varphi_{n_k}(x) = (-1)^k$. □

Aufgabe 3.4.9. *Sei E ein Banachraum, $f : [0,1] \to E$ schwach Lipschitz-stetig, d.h. für alle $\varphi \in E'$ gibt es $M \geq 0$, so dass*

$$|\varphi(f(t) - \varphi(f(s))| \leq M|t - s| \quad (s, t \in [0,1]) \ .$$

Zeige: f ist Lipschitz stetig.

Aufgabe 3.4.10. *Seien E, F Banachräume, $T : E \to F$ linear.*
Zeige, dass T genau dann stetig ist, wenn T schwach stetig ist
(d.h. $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow Tx_n \rightharpoonup Ty$) .

3.5 Das Riemann Integral

Als Anwendung des Fortsetzungssatzes von Hahn-Banach und seinen Folgerungen betrachten wir in diesem und den folgenden zwei Abschnitten vektorwertige Funktionen.
Sei E ein Banachraum und sei $f : [a,b] \to E$ eine Funktion, wobei $-\infty < a < b < \infty$.

Sei π eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ mit Zwischenpunkten $s_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \cdots n$. Abkürzend sagen wir: π ist eine ZmZ . Wir setzen $|\pi| = \max\limits_{i=1\cdots n} |t_i - t_{i-1}|$. Mit

$$S(f,\pi) = \sum_{i=1}^{n} f(s_i)(t_i - t_{i-1})$$

bezeichnen wir die zugehörige Riemann-Summe.

Definition 3.5.1. *Die Funktion* f *heißt* **Riemann-integrierbar**, *falls*

$$y = \lim_{|\pi|\to 0} S(f,\pi)$$

existiert. D.h. also, für alle $\varepsilon > 0$ *gibt es* $\delta > 0$ *, so dass für jede* ZmZ π *mit* $|\pi| < \delta$ *gilt* $\|y - S(f,\pi)\| \le \varepsilon$ *. In dem Fall setzt man* $\int_a^b f(t)\, dt = \lim\limits_{\pi\to 0} S(f,\pi)$ *.*

Lemma 3.5.2. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) es gibt $y \in E$ *, so dass* $\lim\limits_{k\to\infty} S(f,\pi_k) = y$ *für jede Folge* $(\pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *von* ZmZ *mit* $\lim\limits_{k\to 0} |\pi_k| = 0$ *.*

(ii) für alle $\varepsilon > 0$ *gibt es* $\delta > 0$ *, so dass* $\|S(f,\pi_1) - S(f,\pi_2)\| \le \varepsilon$ *für alle* ZmZ π_1, π_2 *mit* $|\pi_1| \le \delta$ *und* $|\pi_2| \le \delta$ *.*

(iii) f *ist Riemann-integrierbar.*

Beweis. *(i)* $\Rightarrow$ *(iii)* Sei $\varepsilon > 0$. Angenommen, es gibt kein $\delta > 0$ wie es in Definition 3.5.1 verlangt wird. Dann finden wir zu jedem $k \in \mathbb{N}$ eine

ZmZ π_k mit $|\pi_k| \leq 1/k$ und $\|S(f, \pi_k) - y\| \geq \varepsilon$. Das widerspricht (i) .
$(iii) \Rightarrow (ii)$ Sei $y = \int_a^b f(t)\ dt$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\delta > 0$, so dass $\|y - S(f, \pi)\| \leq \varepsilon/2$ falls $|\pi| \leq \delta$.
Also ist $\|S(f, \pi_1) - S(f, \pi_2)\| \leq \|S(f, \pi_1) - y\| + \|y - S(f, \pi_2)\| \leq \varepsilon$ falls $|\pi_1|$, $|\pi_2| \leq \delta$.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Das folgt aus der Vollständigkeit von E . □

Satz 3.5.3. *Sei* $f : [a, b] \to E$ *stetig. Dann ist* f *Riemann-integrierbar.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Da f gleichmäßig stetig ist, gibt es $\delta > 0$, so dass $|t - s| \leq \delta$ impliziert $\|f(t) - f(s)\| \leq \varepsilon/2|b - a|$. Seien π_1, π_2 ZmZ mit $|\pi_1| \leq \delta$, $|\pi_2| \leq \delta$. Wähle eine ZmZ π_3 , die feiner als π_1 und π_2 ist (d.h. jeder Teilungspunkt von π_j ist auch Teilungspunkt von π_3 $(j = 1, 2)$) . Dann ist $\|S(f, \pi_j) - S(f, \pi_3)\| \leq \varepsilon/2$ $(j = 1, 2)$. Also ist $\|S(f, \pi_1) - S(f, \pi_2)\| \leq \|S(f, \pi_1) - S(f, \pi_3)\| + \|S(f, \pi_3) - S(f, \pi_2)\| \leq \varepsilon$. □

Wir stellen nun einige Eigenschaften des Riemann Integrals zusammen. Mit $C([a, b], E)$ bezeichnen wir den Raum aller stetigen Funktionen von $[a, b]$ nach E . Es ist ein Banachraum bzgl. der Supremumsnorm

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} \|(t)\| .$$

Satz 3.5.4. *Sei* $f \in C([a, b], E)$.
a) Für jeden Operator $T \in \mathcal{L}(E, F)$ *gilt*

$$T \int_a^b f(t)\ dt = \int_a^b T f(t)\ dt$$

wobei F *ein Banachraum ist.*
b) Insbesondere ist

$$\varphi(\int_a^b f(t)\ dt) = \int_a^b \varphi \circ f(t)\ dt \tag{3.21}$$

für alle $\varphi \in E'$.

Beweis. Es gilt $TS(f,\pi) = S(Tf,\pi)$. Somit folgt Aussage a) durch Grenzüberlegung. $\square$

Nach dem Satz von Hahn-Banach bestimmt (3.21) das Integral eindeutig, d.h. $\int_a^b f(t)\ dt$ ist der eindeutig bestimmte Vektor $y \in E$, so dass

$$\varphi(y) = \int_a^b \varphi(f(t))\ dt \quad \text{für alle} \quad \varphi \in E' \ .$$

Damit lassen sich alle vom skalaren Fall bekannte Eigenschaften auf den vektorwertigen Fall übertragen. So gilt zum Beispiel folgender Satz dessen einfachen Beweis wir dem Leser überlassen.

Satz 3.5.5. *a) Die Abbildung*

$$f \mapsto \int_a^b f(t)\ dt$$

von $C([a,b],E)$ *nach* E *ist linear und stetig.*
b) Es gilt

$$\|\int_a^b f(t)\ dt\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\ dt \tag{3.22}$$

für alle $f \in C([a,b],E)$.

Genau wie im skalaren Fall heißt eine Funktion $f : [a,b] \to E$ **differenzierbar**, falls $f'(t) = \lim\limits_{h\to 0} 1/h(f(t+h)-f(t))$ für alle $t \in [a,b]$ existiert. Ferner heißt f stetig-differenzierbar, falls zusätzlich f' stetig ist. Mit $C^1([a,b],E)$ bezeichnen wir den Raum der stetig-differenzierbaren Funktionen. Es ist ein Banachraum bzgl. der Norm

$$\|f\|_{C^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \ .$$

Wie im skalaren Fall beweist man, dass für $f \in C([a,b],E)$, $x_0 \in [a,b]$ die Funktion $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\ dt$ stetig differenzierbar ist. Mit Hilfe des Satzes von Hahn-Banach (d.h. (3.21) erhält man aus dem skalaren Fall den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int_a^b f'(t)\ dt = f(b) - f(a) \tag{3.23}$$

für alle $f \in C^1([a,b].E)$.

3.6 Vektorwertige holomorphe Funktionen

Als weitere Anwendung des Satzes von Hahn-Banach betrachten wir in diesem und dem folgenden Abschnitt holomorphe Funktionen mit Werten in einem Banachraum. Es stellt sich heraus, dass solche Funktionen in gleicher Weise die aus der Funktionentheorie bekannten Eigenschaften haben. Vektorwertige holomorphe Funktionen sind in der Spektraltheorie von Bedeutung. Aber selbst um Eigenschaften für skalarwertige holomorphe Funktionen zu beweisen, kann es sehr nützlich sein, zu vektorwertigen Funktionen überzugehen. Dies wird bei dem einfachen Beweis des Satzes von Vitali demonstriert, den wir im nächsten Abschnitt geben.

Sei E ein Banachraum über $\mathbb{C}$ und $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge. Eine Funktion $f : \Omega \to E$ heißt **holomorph**, falls

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \tag{3.24}$$

für alle $z \in \Omega$ existiert (wobei h komplexe Werte annimmt); d.h. wenn f komplex differenzierbar ist. Es folgt unmittelbar, dass jede holomorphe Funktion stetig ist. Ferner ist sie **schwach holomorph**, d.h. $\varphi \circ f$ ist holomorph für alle $\varphi \in E'$ (und $(\varphi \circ f)' = \varphi \circ f'$) .
Allgemeiner folgt unmittelbar aus der Definition, dass $T \circ f : \Omega \to F$ für jedes $T \in \mathcal{L}(E,F)$ und jeden Banachraum F holomorph ist.

Zunächst erhalten wir aus dem skalaren Fall mit Hilfe des Satzes von Hahn-Banach den folgenden zentralen Satz:

Satz 3.6.1. (Cauchy'sche Integralformel). *Sei $f : \Omega \to E$ holomorph. Sei $z_0 \in \Omega$, $r > 0$, so dass $\bar{B}(z_0,r) \subset \Omega$. Dann ist*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t-z_0|=r} \frac{f(t)}{t-z}\, dt \tag{3.25}$$

für alle $z \in B(z_0,r)$.

Hier bezeichnet $B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ die offene Kreisscheibe in $\mathbb{C}$ mit Mittelpunkt z_0 und Radius r ; $\bar{B}(z_0, r)$ ist die abgeschlossene Kreisscheibe. Das Integral ist im Sinne eines Riemannschen Kurvenintegral zu verstehen; d.h. für eine stetige Funktion $g : \bar{B}(z_0, r) \to E$ setzen wir

$$\int\limits_{|t-z_0|=r} g(t)\ dt = \int\limits_0^{2\pi} g(z_0 + re^{i\theta}) ire^{i\theta} d\theta \ . \tag{3.26}$$

Da für $\varphi \in E'$ die Funktion $\varphi \circ f$ holomorph ist, gilt nach dem skalarwertigen Satz

$$(\varphi \circ f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t-z_0|=r} \frac{\varphi \circ f(t)}{t - z}\ dt \ . \tag{3.27}$$

Somit folgt (5.2) aus (4.1) und der Tatsache, dass E' den Raum E trennt (1.15).

Wie in der klassischen Situation erhält man aus der Cauchy'schen Integralformel die Potenzreihenentwicklung.

Satz 3.6.2. *Sei* $f : \Omega \to E$ *holomorph und sei* $\bar{B}(z_0, r) \subset \Omega$ *, wobei* $z_0 \in \Omega, r > 0$ *. Setze*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t-z_0|=r} \frac{f(t)}{(t - z_0)^{n+1}}\ dt \tag{3.28}$$

$(n \in \mathbb{N})$ *. Dann ist für* $z \in B(z_0, r)$ *,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \ , \tag{3.29}$$

wobei die Reihe für jedes $0 < \varrho < r$ *gleichmäßig in* $B(z_0, \varrho)$ *konvergiert. Ferner ist* f *unendlich oft komplex differenzierbar und*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \ . \tag{3.30}$$

Beweis. Sei $z \in B(z_0, \varrho)$. Dann konvergiert die Reihe

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{t}\,\frac{1}{1-z/t} = \frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty}(z/t)^n$$

gleichmäßig für $|t - z_0| = r$. Damit kann man in (3.28) Integration und Summation vertauschen und erhält (3.29). Aussage (3.30) ergibt sich daraus wie im skalaren Fall. $\square$

Den Identitätssatz kann man im vektorwertigen Fall allgemeiner formulieren.

Satz 3.6.3 (Identitätssatz)**.** *Sei F ein abgeschlossener Unterraum von E . Sei Ω offen und zusammenhängend und sei $f : \Omega \to E$ holomorph. Wir nehmen an, dass die Menge*

$$\Omega_F = \{z \in \Omega : f(z) \in F\}$$

einen Häufungspunkt in Ω hat. Dann ist $f(z) \in F$ für alle $z \in \Omega$.

Beweis. Sei $q : E \to E/F$ die Quotientenbildung. Dann ist $q \circ f$ holomorph. Sei $\varphi \in (E/F)'$. Dann ist die Funktion $\varphi \circ q \circ f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und verschwindet auf Ω_F . Der klassische Identitätssatz impliziert, dass $\varphi \circ q \circ f(z) = 0$ für alle $z \in \Omega$. Nun folgt die Behauptung aus dem Satz von Hahn-Banach. $\square$

Als nächstes zeigen wir, dass jede schwach holomorphe Funktion holomorph ist. Es wird nützlich sein, etwas mehr zu zeigen. Dazu nennen wir eine Teilmenge M von E' **normierend**, falls

$$\|x\|_{M} := \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in M\} \tag{3.31}$$

eine äquivalente Norm auf E definiert.

Beispiel 3.6.4. a) Die Einheitskugel $M = B_{E'}$ ist normierend und $\|\ \|_M = \|\ \|$. Das folgt aus dem Satz von Hahn-Banach.
b) Sei $E = F'$ der Dualraum eines normierten Raumes F . Sei M_0 eine dichte Teilmenge in B_F . Dann ist $M = \{j_x : x \in M_0\}$ normierend und $\|x'\| = \|x'\|_M$ für alle $x' \in E$. Hier ist $j_x \in E' = F''$ gegeben durch

$j_x(x') = x'(x)$.
c) Sei $E = C[0,1]$. Für $t \in [0,1]$ bezeichnen $\delta_t \in E'$ das Dirac-Maß (d.h. $\delta_t(f) = f(t)$ für alle $f \in E\}$. Die Menge $M = \{\delta_t : t \in [0,1]\}$ ist normierend und $\|f\|_M = \|f\| \quad (f \in E)$.

Eine Funktion $f : \Omega \to E$ heißt **lokal beschränkt**, falls es zu jedem $z \in \Omega$ ein $r > 0$ gibt, so dass

$$\sup_{z \in B(0,r)} \|f(z)\| < \infty .$$

Das ist natürlich dazu äquivalent, dass f auf allen kompakten Teilmengen von Ω beschränkt ist.

Satz 3.6.5. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \to E$ eine lokal beschränkte Funktion. Es gebe eine normierende Teilmenge M von E' , so dass $\varphi \circ f$ für alle $\varphi \in M$ holomorph ist. Dann ist f holomorph.*

Beweis. Wir können annehmen, dass $\|x\| = \|x\|_M$ für alle $x \in E$.
Sei $z_0 \in \Omega$. Um Holomorphie in z_0 zu zeigen, können wir annehmen, dass $z_0 = 0$ (sonst betrachten wir $\Omega - z_0$ statt Ω und $g(z) = f(z + z_0)$ statt f) .
Für kleine $h, k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ setzen wir

$$u(h,k) = \frac{f(h) - f(0)}{h} - \frac{f(k) - f(0)}{k} .$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wir müssen zeigen, dass $\delta > 0$ existiert, so dass $\|u(h,k)\| \le \varepsilon$, falls $|h| \le \delta$ und $|k| \le \delta$. Sei $r > 0$, so dass $\bar{B}(0,2r) \subset \Omega$, und sei

$$c := \sup_{z \in \bar{B}(0,2r)} \|f(z)\| < \infty .$$

Sei $\varphi \in M$. Aus der Cauchy'schen Integralformel ergibt sich für $h, k \in$

$\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $|h| \le r, |k| \le r$,

$$\begin{aligned}
\varphi \circ u(h,k) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=2r} \varphi(f(t)) \cdot \{\frac{1}{h}[\frac{1}{t-h} - \frac{1}{t}] - \frac{1}{k}[\frac{1}{t-k} - \frac{1}{t}]\} \; dt \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=2r} \varphi(f(t)) \cdot \{\frac{1}{(t-h)t} - \frac{1}{(t-k)t}\} \; dt \\
&= (h-k) \, \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=2r} \frac{\varphi(f(t))}{t(t-h)(t-k)} \; dt \; .
\end{aligned}$$

Somit ist $|\varphi(u(h,k))| \le |h-k| \cdot c/r^2$. Daraus folgt die Behauptung. ☐

Korollar 3.6.6. *Sei* $f : \Omega \to E$ *eine schwach holomorphe Funktion (d.h.* $\varphi \circ f$ *ist holomorph für alle* $\varphi \in E'$*) . Dann ist* f *holomorph.*

Beweis. Aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit folgt, dass f lokal beschränkt ist. ☐

Genauso erhält man:

Korollar 3.6.7. *Sei* $f : \Omega \to E'$ *eine Funktion, derart dass* $f(\cdot)(x)$ *für alle* $x \in E$ *holomorph ist. Dann ist* f *holomorph.*

Bemerkung 3.6.8. Satz 3.5.5. läßt sich wesentlich verschärfen: Statt vorauszusetzen, dass M normierend ist, reicht die schwächere Aussage, dass M die Punkte von E trennt (d.h. zu $x, y \in E$ mit $x \neq y$ existiert $\varphi \in E'$, so dass $\varphi(x) \neq \varphi(y)$) . Der Beweis dieser stärkeren Aussage beruht auf dem Satz von Vitali und dem Satz von Krein-Sumlyan (siehe [ABHN, Appendix A]).

Aufgabe 3.6.9. *Sei* $f : [a,b] \times \Omega \to E$ *eine Funktion, so dass*

(a) $f(\cdot, z) \in C([a,b], E)$ *für alle* $z \in \Omega$ *;*

(b) $f(t, \cdot) : \Omega \to E$ *holomorph ist für jedes* $t \in [a,b]$ *.*

dann definiert $F(z) = \int_a^b f(t,z) \; dt$ *eine holomorphe Funktion* $F : \Omega \to E$ *.*
Anleitung: *Zeige, dass die Funktion* $g : \Omega \to C([a,b], E)$ *,* $z \mapsto f(\cdot, z)$ *holomorph ist. Ferner definiert* $Jh = \int_a^b h(t) \; dt$ *einen Operator* $J \in \mathcal{L}(C([a,b], E)$ *. Damit ist also* $J \circ g$ *holomorph.*

Bemerkung 3.6.10. Ist Ω zusammenhängend, so kann die Aussage verschärft werden. Siehe Aufgabe 3.7.3.

3.7 Folgen von holomorphen Funktionen

Sei E ein Banachraum und $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge. Eine Folge von Funktionen $f_n : \Omega \to E$ heißt **lokal beschränkt**, falls für jedes $z \in \Omega$ ein $r > 0$ existiert,so dass

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{w\in B(z,r)} \|f_n(w)\| < \infty .$$

Mit Hilfe eines einfachen Kompaktheitsschlusses sieht man, dass dies schon impliziert, dass

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{w\in K} \|f_n(w)\| < \infty$$

für jede kompakte Teilmenge K von Ω. Wir beweisen nun den bemerkenswerten Satz von Vitali. Er besagt zwei Dinge:
1. Der einfache Grenzwert einer lokal beschränkten Folge holomorpher Funktion ist holomorph.
2. Es reicht einfache Konvergenz auf einer kleinen Menge vorauszusetzen; sie pflanzt sich automatisch fort.

Satz 3.7.1 (Vitali)**.** *Sei Ω zusammenhängend. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine lokal beschränkte Folge holomorpher Funktionen auf Ω mit Werten in E. Die Menge $\Omega_0 := \{z \in \Omega : (f_n(z))_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert}\}$ habe einen Häufungspunkt in Ω. Dann gibt es eine holomorphe Funktion $f : \Omega \to E$, so dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf jedem Kompaktum in Ω gegen f konvergiert.*

Beweis. Sei $\ell^\infty(E)$ der Banachraum aller beschränkten Folgen in E mit der Supremumsnorm. Dann ist der Raum $c(E)$ aller konvergenten Folgen in E abgeschlossen in $\ell^\infty(E)$. Die Abbildung $F : \Omega \to \ell^\infty(E)$ gegeben durch $F(z) = (f_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ ist lokal beschränkt und holomorph. Letzeres folgt aus Satz 3.5.5 indem man etwa $M \subset (\ell^\infty(E))'$ als die Menge der Linearformen φ der Form $\varphi(y) = x'(y_n)$ $(y \in \ell^\infty(E))$, wobei $n \in \mathbb{N}$ und $x' \in B_{E'}$.
Nach Voraussetzung ist $F(z) \in c(E)$ für alle $z \in \Omega_0$. Daher folgt aus

dem Identitätssatz 3.6.3, dass $F(z) \in c(E)$ für alle $z \in \Omega$. Wir haben bewiesen, dass $f(z) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$ für alle $z \in \Omega$ existiert. Definiere $\Phi \in \mathcal{L}(c(E), E)$ durch $\Phi(y) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Da $F : \Omega \to c(E)$ holomorph ist, ist auch $f = \Phi \circ F$ holomorph. Schließlich folgt aus der Stetigkeit von F unmittelbar, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichstetig ist. Nach Satz 1.6.5 konvergiert sie also gleichmäßig auf jedem Kompaktum von Ω . □

Korollar 3.7.2 (Montel)**.** *Sei Ω zusammenhängend. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine lokal beschränkte Folge von holomorphen Funktionen auf Ω mit Werten in E . Ferner habe die Menge $\Omega_0 = \{z \in \Omega : \{f_n(z) : n \in \mathbb{N}\}$ ist relativ kompakt$\}$ einen Häufungspunkt in Ω . Dann besitzt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge die auf jedem Kompaktum von Ω gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion $f : \Omega \to E$ konvergiert.*

Beweis. Wähle $z_p \in \Omega_0$, so dass $\lim z_p = z_0$ in Ω existiert und $z_p \neq z_0$ für alle $p \in \mathbb{N}$. Mit Hilfe des Diagonalfolgenarguments findet man eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, so dass $(f_{n_k}(z_p))_{k\in\mathbb{N}}$ für jedes $p \in \mathbb{N}$ konvergiert. Damit folgt die Behauptung aus dem Satz von Vitali. □

In den folgenden drei Aufgaben wird illustriert, wie man den Satz von Vitali anwenden kann. Die erste davon ist eine Verallgemeinerung von Aufgabe 3.6.9.

Aufgabe 3.7.3. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend. Sei $f : [a,b] \times \Omega \to E$ eine beschränkte Funktion, so dass $f(t,\cdot)$ für jedes $t \in [a,b]$ holomorph ist. Die Menge $\Omega_0 = \{z \in \Omega : f(\cdot,z)$ ist Riemann-integrierbar$\}$ habe einen Häufungspunkt in Ω .*
Zeige: *$f(\cdot,z)$ ist für alle $z \in \Omega$ Riemann-integrierbar und $F(z) = \int_a^b f(t,z)\,dt$ definiert eine holomorphe Funktion $F : \Omega \to E$.*

Aufgabe 3.7.4. (Laplace Transformation) *Sei $f : [0,\infty] \to E$ stetig, so dass $\|f(t)\| \leq Me^{\omega t}$ $(t \geq 0)$, wobei $M \geq 0$, $\omega \in \mathbb{R}$. Sei $\mathbb{H}_{\mathrm{w}} = \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > \omega\}$.*
Zeige, dass $F(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)\,dt = \lim\limits_{k\to\infty} \int_0^k e^{-\lambda t} f(t)\,dt$ eine holomorphe Funktion $F : \mathbb{H}_{\mathrm{w}} \to E$ definiert.

Aufgabe 3.7.5. *Sei $A \in \mathcal{L}(E)$. Zeige, dass*

$$e^{zA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n A^n}{n!} \quad (z \in \mathbb{C})$$

eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ *mit Werten in* $\mathcal{L}(E)$ *definiert.*

In der folgenden Aufgabe wird an einem weiteren Beispiel verdeutlicht, wie aus Eindeutigkeitssätzen Konvergenzsätze hergeleitet werden können.

Aufgabe 3.7.6. *a) Wir erinnern an folgenden Eindeutigkeitssatz aus der Funktionentheorie. Sei* $f : \mathbb{H}_0 = \{z \in \mathbb{C} : Re\, z > 0\} \to \mathbb{C}$ *holomorph und beschränkt, so dass* $f(k) = 0$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$ *. Dann gilt* $f(z) = 0$ *für alle* $z \in \mathbb{H}_0$ *.*
b) Sei F *ein abgeschlossener Unterraum von* E *und* $f : \mathbb{H}_0 \to E$ *holomorph und beschränkt, so dass* $f(k) \in F$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$ *.*
Zeige: $f(z) \in F$ *für alle* $z \in \mathbb{H}_0$ *.*
c) Sei $f_n : \mathbb{H}_0 \to E$ *holomorph, so dass* $\|f_n(z)\| \le M$ *für alle* $z \in \mathbb{H}_0$ *,* $n \in \mathbb{N}$ *. Die Folge* $(f_n(k))_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert für jedes* $k \in \mathbb{N}$ *.*
Zeige: *Die Folge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gegen eine holomorphe Funktion* $f : \mathbb{H}_0 \to E$ *und zwar gleichmäßig auf jedem Kompaktum von* $\mathbb{H}_0$ *.*

In den folgenden Aufgaben benutzen wir die Technik dieses Abschnitts, um den Satz von Arzela-Ascoli und ähnliche Resultate nochmals zu beweisen. In diesen Aussagen kommen holomorphe Funktionen jedoch nicht vor.

Aufgabe 3.7.7. *Sei* M *ein metrischer Raum und* E *ein Banachraum. Sei* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine punktweise beschränkte Folge von Funktionen auf* M *mit Werten in* E *. Wir betrachten die Abbildung* $F : M \to E$ *, die durch* $F(x) = (f_n)(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *definiert ist.*

(a) *Zeige:* F *ist genau dann stetig, wenn die Folge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gleichstetig ist.*

(b) *Es gebe eine dichte Teilmenge* D *von* M *, so dass* $F(x) \in c(E)$ *für alle* $x \in D$ *.*

Zeige: *Falls die Folge gleichstetig ist, so ist* $F(x) \in c(E)$ *für alle* $x \in E$ *.*

(c) Sei M separabel und sei $\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ relativ kompakt in E für alle $x \in M$.

Zeige: Es gibt eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ die punktweise gegen eine stetige Funktion $f : M \to E$ konvergiert.
Anleitung: Benutze das Diagnonalisierungsverfahren.
Teil (b) wurde im Beweis von Satz 1.6.5 direkt bewiesen.

Aufgabe 3.7.8. *Sei* K *eine relativ kompakte Teilmenge von* $c(E)$ *. Zeige: Zu jedem* $\varepsilon > 0$ *gibt es* $n_0 \in \mathbb{N}$ *, so dass* $\|x_\infty - x_n\| \le \varepsilon$ *für alle* $n \ge n_0$ *und alle* $x \in K$ *. Hier setzen wir* $x_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ *für* $x \in c(E)$ *.*

Aufgabe 3.7.9. *a) Sei* K *ein kompakter metrischer Raum und* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine gleichstetige Folge stetiger Funktionen von* K *nach* E *. Es existiere*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

für alle $x \in K$ *.*
Zeige: Die Konvergenz ist gleichmäßig.
Anleitung: *Betrachte* $F : K \to c(E)$, $x \mapsto (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *und benutze Aufgabe 3.6.8.*
b) Beweise mit Hilfe von a) und Aufgabe 3.6.7 c) eine vektorwertige Version des Satzes von Arzela-Ascoli.

3.8 Riemann-Steltjes Integral und $(\mathbf{C}[\mathbf{a},\mathbf{b}])'$.

Als Anwendung des Satzes von Hahn-Banach geben wir hier eine analytische Beschreibung des Dualraumes von $C[a,b]$. Sei $[a,b]$ ein kompaktes Intervall. Eine Funktion $g:[a,b]\to\mathbb{K}$ heißt von beschränkter Variation, falls es eine Konstante $c\geq 0$ gibt, derart daß

$$\sum_{i=1}^{n}|g(t_i)-g(t_{i-1})|\leq c \tag{3.7}$$

für jede Partition $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$. Mit $BV[a,b]$ bezeichnen wir den $\mathbb{K}$-Vektorraum der Funktionen von beschränkter Variation auf $[a,b]$ mit Werten in $\mathbb{K}$. Sei $g\in BV[a,b]$. Wir nennen dann

$$Var(g):=\inf\{c\geq 0:\quad (6.1)\text{ gilt}\} \tag{3.8}$$

die Variation von g . Es gilt

$$Var(g_{|[a,c]})+Var(g_{|[c,b]})=Var(g) \tag{3.9}$$

für alle $c\in(a,b)$. Insbesondere ist die Funktion $V_g:[a,b]\to[0,Var(g)]$, $t\mapsto Var(g_{|[a,t]})$ monoton wachsend und

$$Var(g_{|[s,t]})=V_g(t)-V_g(s) \tag{3.10}$$

für $a\leq s<t\leq b$. Wir setzen

$$\|g\|_{BV}=|g(a)|+Var(g)\ . \tag{3.11}$$

Da für $t\in[a,b]$, $|g(t)-g(a)|\leq Var(g)$, gilt dann

$$\|g\|_\infty\leq\|g\|_{BV}\ . \tag{3.12}$$

Man sieht leicht, daß (6.4) eine Norm auf $BV[a,b]$ definiert.

Satz 3.8.1. *Der Raum* $(BV[a,b],\|\ \|_{BV})$ *ist ein Banachraum.*

Sei $(g_N)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $BV[a,b]$. Da $\mathcal{F}^b([a,b],\| \; \|_\infty)$ vollständig ist, existiert

$$g(t) = \lim_{n\to\infty} g_n(t) \tag{3.13}$$

für alle $t \in [a,b]$. Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $Var(g_n - g_m) \le \varepsilon$ für alle $n,m \ge n_0$. Sei $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = b$ eine Partition. Dann ist $\sum\limits_{j=1}^{r} |(g_n - g_m)(t_i) - (g_n - g_m)(t_{i-1})| \le \varepsilon$ für alle $n,m \ge n_0$. Mit $m \to \infty$ erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{r} |(g_n - g)(t_i) - (g_n - g)(t_{i-1})| \le \varepsilon$$

für alle $n \ge n_0$. Damit ist $g \in BV[a,b]$ und $Var(g - g_n) \le \varepsilon$ für alle $n \ge n_0$. Wir haben gezeigt, daß $\lim\limits_{n\to\infty} Var(g - g_n) = 0$. Mit (6.6) schließen wir, daß $\lim\limits_{n\to\infty} \|g - g_n\|_{BV} = 0$. ■

Als nächstes definieren wir das Riemann-Stieltjes Integral bzgl. einer Funktion $g \in BV[a,b]$. Sei $f \in C[a,b]$. Sei π eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ mit Zwischenstellen $s_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Dann nennt man

$$\sum(f,g,\pi) = \sum_{i=1}^{n} f(s_i)(g(t_i) - g(t_{i-1}))$$

eine **Riemann-Stieltjes Summe von** f bzgl. g und π . Mit $|\pi|$: $\sup\limits_{i=1\cdots n} |t_i - t_{i-1}|$ bezeichnen wir die **maximale Maschenweite** oder **Norm** von π und damit existiert der Limes in (6.7). Die übrigen Aussagen folgen unmittelbar aus der Definition. ■

Man sieht leicht, daß für $c \in (a,b)$

$$\int_a^b f dg = \int_a^c f dg + \int_c^b f dg \tag{3.14}$$

für alle $f \in C[a,b]$, und

$$\int_a^b 1 dg = g(b) - g(a) \; , \tag{3.15}$$

wobei $g \in BV[a,b]$. Jedes $g \in BV[a,b]$ definiert also mittels (6.7) eine stetige Linearform auf $C[a,b]$. Die Darstellung ist aber nicht eindeutig. Wir sagen, daß eine Funktion $g \in BV[a,b]$ **normalisiert** ist, falls g linksseitig stetig in (a,b) ist und $g(a) = 0$. Mit $BV_n[a,b]$ bezeichnen wir die Teilmenge der normalisierten Funktionen in $BV[a,b]$. Man sieht leicht, daß $BV_n[a,b]$ ein abgeschlossener Unterraum von $BV[a,b]$ ist. Man kann nun jedes $g \in BV[a,b]$ normalisieren, ohne daß sich die durch g definierte Linearform ändert.

Satz 3.8.2. *Sei* $g \in BV[a,b]$. *Dann existiert*

$$\int_a^b f(t)dg(t) := \lim_{|\pi|\to 0} \sum(f,g,\pi) \tag{3.16}$$

für jedes $f \in C[a,b]$. *Die Abbildung* $f \mapsto \int_a^b f(t)dg(t)$ *definiert eine stetige Linearform* φ *auf* $C[a,b]$ *mit* $\|\varphi\| \le Var(g)$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Da f gleichmäßig stetig ist, gibt es $\delta > 0$ derart, daß $|f(s) - f(r) \le \varepsilon$, wenn $|s - r| \le \delta$. Seien π_1, π_2 zwei Positionen mit Stützstellen mit $|\pi_1|, |\pi_2| \le \delta$. Wähle eine Partition π mit Stützstellen, die feiner als π_1 und π_2 ist (d.h. jeder Teilungspunkt von π_1 und π_2 ist auch Teilungspunkt von π) . Dann ist $|\sum(f,g,\pi) - \sum(f,g,\pi_j)| \le \varepsilon Var(g) \quad (j = 1,2)$, also $|\sum(f,g,\pi_1) - \sum(f,g,\pi_2)| \le 2\varepsilon Var(g)$. Wir haben gezeigt, daß $(\sum(f,g,\pi))_\pi$ ein Cauchysystem ist.

Lemma 3.8.3. *Sei* $g \in BV[a,b]$. *Dann existiert in jedem* $t \in (a,b]g(t) := \lim\limits_{s\uparrow t} g(s)$ *und in jedem* $t \in [a,b]$, $g(t+) = \lim\limits_{s\downarrow t} g(s)$. *Die Menge der Unstetigkeitspunkte ist abzählbar. Ferner gibt es genau eine Funktion* $h \in BV_n[a,b]$ *derart, daß*

$$\int_a^b f(t)dg(t) = \int_a^b f(t)dh(t)$$

für alle $f \in C[a,b]$.

Beweis. Sei $t \in (a,b]$, $t_n < t$, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t$. Dann ist $\sum\limits_{i=1}^n |g(t_i) - g(t_{i-1})| \le Var(g)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit existiert $\lim\limits_{i\to\infty} g(t_i)$. Damit existiert der linksseitige Grenzwert in t . Genauso existiert der rechtsseitige. Sind $t_1, \cdots t_r \in$

$[a,b]$ beliebig, so gilt

$$\sum_{i=1}^{n} |g(t_i+) - g(t_i-)| \leq Var(g) \ .$$

Damit ist nach Aufgabe die Menge der Unstetigkeitsstellen U abzählbar, sagen wir $U = \{t_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Da der Limes in (6.7) für jede Folge von Partitionen mit Zwischenstellen deren Maschenweiten gegen 0 strebt gleich ist, kann man g in abzählbar vielen Stellen im Inneren von (a,b) ändern, ohne daß sich das Integral (6.7) ändert. ∎

Nun erhalten wir folgende Eindeutigkeitsaussage:

Lemma 3.8.4. *Sei $g \in BV[a,b]$, so daß $\int_a^b f dg = 0$ für alle $f \in C[a,b]$. Dann ist $g(a) = g(b) = g(t-) = g(t+)$ für alle $t \in (a,b)$.*

Beweis . Es ist $g(b) - g(a) = \int_a^b 1 dg(t) = 0$. Sei $t \in (a,b)$. Wähle $a < r < s < t$. Sei $f = 1$ auf $[s,b], f = 0$ auf $[a,r]$ und affine auf $[r,s]$. Dann ist $0 = S_a^b f dg = g(b) - g(s) + \int_r^s f dg$. Folglich ist $|g(b) - g(s)| \leq \|f\|_\infty (V_g(s) - V_g(r))$. Mit $s \uparrow t$ erhalten wir $|g(b) - g(t-)| \leq \|f\|_\infty (V_g(t-) - V_g(r))$. Mit $r \uparrow t$ folgt jetzt $|g(b) - g(t-)| \leq \|f\|_\infty (V_g(t-) - V_g(t-)) = 0$. Ähnlich sieht man, daß $g(t+) = 0$ für alle $t \in (a,b)$. ∎

Satz 3.8.5. *Durch $\varphi : BV_n[a,b] \to C[a,b]'$, $g \mapsto \varphi_g$ mit $\varphi_g(f) = \int_a^b f(t) dg(t)$ $(f \in C[a,b])$ wird ein isometrischer Isomorphisms definiert. Wir können also identifizieren: $C[a,b]' = BV_n[a,b]$.*

Beweis . Die Abbildung φ ist linear und stetig, $\|\varphi_g\| \leq Var(g) = \|g\|_{BV}$ für alle $g \in BV_n[a,b]$. Aus Lemma 6.4 folgt, daß φ injektiv ist. Sei $\Psi \in C[a,b]'$. Wir zeigen, daß es $\bar{g} \in BV_n[a,b]$ gibt mit $\|g\|_{BV} \leq \|\Psi\|$ und $\Psi = \varphi_{\bar{g}}$. Nach dem Satz von Hahn-Banach besitzt Ψ eine Fortsetzung $\tilde{\Psi} \in (\mathcal{F}^b[a,b])'$ mit $\|\tilde{\Psi}\| = \|\Psi\|$. Setze $g(t) = \tilde{\Psi}(1_{(a,t]})$. Dann ist $g(a) = 0$

und für eine Partition $a = t_0 < t, < \cdots < t_n = b$ ist

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})| &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (g(t_i) - g(t_{i-1})) = \\
\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{\Psi}(1_{(t_{i-1},t_i]} &= (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i 1_{(t_{i-1},t_i]}) \leq \\
\|\tilde{\Psi}\| \cdot \| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i 1_{(t_{i-1},t_i]}\| &= \|\tilde{\Psi}\| = \|\Psi\| \ .
\end{aligned}$$

Wir zeigen nun, daß $\Psi = \varphi g$. Sei $f \in C[a,b], \varepsilon > 0$. Da f gleichmäßig stetig ist, gibt es $\delta > 0$, so daß $|f(s) - f(t)| \leq \varepsilon$ falls $|t-t| \leq \delta$. Sei π eine Partition mit Stützstellen, so daß $|\pi| \leq \delta$ und $| \int_a^b f dg - \sum(f,g,\pi)| \leq \varepsilon$. Dann ist

$$\begin{aligned}
| \int_a^b f dg - \Psi(f)| &\leq \varepsilon + | \sum(f,g,\pi) - \Psi(f)| \\
&= \varepsilon + | \sum_{i=1}^{n} f(s_i)(g(t_i) - g(t_{i-1})) - \Psi(f)| \\
&= \varepsilon + |\tilde{\Psi}(\sum_{i=1}^{n} f(s_i) 1(t_{i-1}, t_i] - f)| \\
&\leq \varepsilon + \|\tilde{\Psi}\| \ \| \sum_{i=1}^{n} f(s_i) 1(t_{i-1}, t_i] - f)\|_\infty \leq \varepsilon + \|\tilde{\Psi}\| \varepsilon \ .
\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt daß $\varphi(f) = \int_a^b f dg$. Nun wähle $\bar{g} \in BV_n[a,b]$, so daß $g(t) = \bar{g}(t)$ in allen Stetigkeitspunkten von g . Dann ist $\varphi = \varphi_{\bar{g}}$. ■

Kapitel 4

Spektraltheorie

Auch in diesem Kapitel geht es um die Frage nach der Invertierbarkeit eines Operators $T \in \mathcal{L}(E)$; also um Existenz und Eindeutigkeit der Gleichung

$$Tx = y \ .$$

Aus der linearen Algebra weiß man, dass hier im endlich dimensionalen Fall Injektivität äquivalent zu Surjektivität ist. In Abschnitt 4.2 werden wir sehen, dass diese Aussage für eine spezielle interessante Klasse von Operatoren auch auf Banachräumen richtig bleibt. Es ist günstig, gleichzeitig mit T auch $T - \lambda I \quad (\lambda \in \mathbb{K})$ zu untersuchen. Das führt zur **Spektraltheorie**. Für jeden Operator definiert man das **Spektrum** als eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$. Der Zusammenhang zwischen diesem Spektrum und Eigenschaften des Operators ist ein äußerst interessantes Thema.

4.1 Spektrum und Resolvente

Sei E ein Banachraum über $\mathbb{K}$ verschieden vom Nullraum. Sei $T \in \mathcal{L}(E)$. Zusammen mit T betrachten wir die Operatoren $\lambda I - T$, die wir auch einfacher als $\lambda - T$ schreiben, wobei $\lambda \in \mathbb{K}$ und I die Identität auf E ist. Die Menge

$$\varrho(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} : (\lambda - T) \text{ ist invertierbar}\}$$

heißt die **Resolventenmenge** von T . Man nennt

$$R(\lambda, T) = (\lambda - T)^{-1}$$

die Resolvente von T in λ $(\lambda \in \varrho(T))$. Die Menge

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \varrho(T)$$

heißt das **Spektrum** von T .

Satz 4.1.1. *Sei* $\lambda_0 \in \varrho(T)$ *. Sei* $\lambda \in \mathbb{K}$ *mit* $|\lambda - \lambda_0| < \|R(\lambda_0, T)\|^{-1}$ *. Dann ist* $\lambda \in \varrho(T)$ *und*

$$R(\lambda, T) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0, T)^{n+1} , \tag{4.1}$$

wobei die Reihe (4.1) in $\mathcal{L}(E)$ *konvergiert.*

Beweis. Es ist $\lambda - T = \lambda - \lambda_0 + \lambda_0 - T = (I - (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0, T))(\lambda_0 - T)$. Da $\|(\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0, T)\| < 1$ ist nach Satz 2.1.4,

$$(I - (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0, T))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0, T)^n .$$

Somit ist $(\lambda - T)$ invertierbar und

$$\begin{aligned} R(\lambda, T) &= R(\lambda_0, T)(I - (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0, T))^{-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0, T)^{n+1} . \end{aligned}$$

□

Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so impliziert Satz 4.1.1, dass die Abbildung $R : \varrho(T) \to \mathcal{L}(E)$, $\lambda \mapsto R(\lambda, T)$ holomorph ist. Ferner ist nach Satz 3.6.2,

$$\frac{R(\lambda_0, T)^{(k)}}{k!} = (-1)^k R(\lambda_0, T)^{k+1} \quad (k \in \mathbb{N}) . \tag{4.2}$$

Satz 4.1.2. *Das Spektrum* $\sigma(T)$ *von* T *ist kompakt, und es gilt* $|\lambda| \le \|T\|$ *für alle* $\lambda \in \sigma(T)$ *. Ist* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *, so ist* $\sigma(T) \neq \emptyset$ *.*

Beweis. a) Sei $|\lambda| > \|T\|$. Dann ist nach Satz 2.1.4 $(\lambda - T) = \lambda(I - \frac{T}{\lambda})$ invertierbar und

$$R(\lambda, T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}} \tag{4.3}$$

da $\|T/\lambda\| < 1$. Da $\sigma(T)$ abgeschlossen ist, folgt die Kompaktheit.
b) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Angenommen $\sigma(T) = \emptyset$. Dann ist $R : \lambda \mapsto R(\lambda, T)$ eine ganze Funktion. Nach (4.3) ist $\|R(\lambda, T)\| \leq 1/|\lambda| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n/|\lambda|^n \leq 2/|\lambda|$ falls $|\lambda| \geq 2\|T\|$. Also ist $\lim_{|\lambda|\to\infty} \|R(\lambda, T)\| = 0$. Sei $\varphi \in \mathcal{L}(E)'$. Aus dem Satz von Liouville folgt, dass $\varphi \circ R(\lambda, T) = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Damit ist $R(\lambda, T) = 0 \quad (\lambda \in \mathbb{C})$ nach dem Satz von Hahn-Banach. Das ist unmöglich. □

Mit

$$r(T) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\} \tag{4.4}$$

bezeichnet man den **Spektralradius** von T .

Zunächst bemerken wir

Satz 4.1.3. *Sei* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *. Dann gibt es* $\lambda \in \sigma(T)$ *mit* $|\lambda| = r(T)$ *.*

Beweis. Wegen Satz 4.1.2 können wir annehmen, dass $r(T) > 0$. Es gibt $\lambda_n \in \sigma(T)$, so dass $|\lambda_n| \to r(T)$. Es gibt eine konvergente Teilfolge $(\lambda_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Dann ist $\lambda = \lim_{k\to\infty} \lambda_{n_k} \in \sigma(T)$ und $|\lambda| = r(T)$. □

Wir wissen schon, dass $r(T) \leq \|T\|$. Genauer gilt die folgende Formel für den Spektralradius.

Satz 4.1.4. *Sei* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *. Dann ist*

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n} .$$

Beweis. a) Sei $n \in \mathbb{N}$, so dass $\|T^n\| < 1$. Sei $c = \sum_{k=0}^{n-1} \|T^k\|$. Dann ist

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty} \|T^m\| &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{n-1} \|T^{nm+p}\| \\ &\le \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{n-1} \|T^p\|\,\|T^{nm}\| \\ &\le \sum_{m=0}^{\infty} c\|T^n\|^m < \infty \,.\end{aligned}$$

Daraus folgt wie in Satz 2.1.4, dass $1 \in \varrho(T)$ und $(I-T)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} T^m$ (vgl. Aufgabe 4.1.15).

b) Seien $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, so dass $\|T^n\| < |\lambda|^n$. Dann existiert nach a) $\lambda(\lambda - T)^{-1} = (I - \frac{T}{\lambda})^{-1}$. Wir haben gezeigt, dass $r(T) \le \inf_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n}$.

c) Sei $r(T) < \varrho$. Da $R(1/\lambda, T) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1}T^n$ für $|\lambda| < \|T\|^{-1}$ (nach (4.3)), folgt aus Satz 3.6.2, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1}T^n$ für $|\lambda| < r(T)^{-1}$, also insbesondere für $\lambda = \varrho^{-1}$ konvergiert. Damit ist aber $(\varrho^{-(n+1)}T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Für eine Schranke $c \ge 0$ gilt also $\|T^n\| \le c\varrho^n\varrho$. Damit ist $\overline{\lim_{n\to\infty}} \|T^n\|^{1/n} \le \overline{\lim_{n\to\infty}} c^{1/n}\varrho\varrho^{1/n} = \varrho$. Wir haben gezeigt, dass $r(T) \le \inf_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n} \le \overline{\lim_{n\to\infty}} \|T^n\|^{1/n} \le r(T)$. □

Schließlich beweisen wir die **Resolventengleichung**:

Satz 4.1.5. *Es gilt*

$$\frac{R(\lambda,T) - R(\mu,T)}{\mu - \lambda} = R(\lambda,T)R(\mu,T) \tag{4.5}$$

für alle $\lambda, \mu \in \varrho(T)$, $\lambda \ne \mu$.

Beweis. Durch Ausklammern erhält man

$$\begin{aligned}&R(\lambda,T) - R(\mu,T) = R(\lambda,T)\{I - (\lambda - T)R(\mu,T)\}\\ &= R(\lambda,T)\{(\mu - T) - (\lambda - T)\}R(\mu,T)\\ &= R(\lambda,T)(\mu - \lambda)R(\mu,T) \,. \quad \square\end{aligned}$$

Definition 4.1.6. *Ein Skalar* $\lambda \in \mathbb{K}$ *heißt* **Eigenvektor** *von* T *, falls es* $x \in E \setminus \{0\}$ *gibt, so dass* $Tx = \lambda x$ *. Der Vektor* x *heißt dann* **Eigenvektor** *zum Eigenwert* λ *. Die Menge* $\sigma_p(T)$ *der Eigenwerte von* T *wird auch als das* **Punktspektrum** *von* T *bezeichnet.*

Somit ist $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} : (\lambda - T) \text{ ist nicht in injektiv } \} \subset \sigma(T)$. Jedoch ist diese Inklusion im allgemeinen strikt, wie einfache Beispiele zeigen (siehe z.B. Aufgabe 4.1.16). Der Grund ist, dass auf einem ∞ -dimensionalen Banachraum ein injektiver Operator nicht notwendig surjektiv ist. Wir führen eine weitere Teilmenge des Spektrums ein.

Definition 4.1.7. *Das* **approximative Punktspektrum** $\sigma_{ap}(T)$ *von* T *ist die Menge der* $\lambda \in \mathbb{K}$ *für die* $x_n \in E$ *existieren mit* $\|x_n\| = 1$ *, so dass*

$$\lim_{n\to\infty} \|\lambda x_n - Tx_n\| = 0 \ .$$

Anders formuliert,

$$\mathbb{C}\setminus\sigma_{ap}(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \exists\, \alpha > 0 \quad \textit{so dass} \quad \|(\lambda - T)x\| \geq \alpha\|x\| \quad \textit{für alle} \quad x \in E\} \ .$$

Es ist klar, dass $\sigma_{ap}(T) \subset \sigma(T)$. Aber auch hier stimmt die Gleichheit im allgemeinen nicht. Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{ap}(T)$ erhält man lediglich, dass das Bild $(\lambda - T)E$ abgeschlossen ist (denn ist $y = \lim_{n\to\infty} (\lambda - T)x_n \in \overline{(\lambda - T)E}$, so ist $\alpha\|x_n - x_m\| \leq \|(\lambda - T)(x_n - x_m)\|$; damit ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge; für $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ gilt dann $(\lambda - T)x = y)$.
Für $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_{ap}(T)$ ist also das Bild $(\lambda - T)E$ abgeschlossen aber nicht notwendigerweise der ganze Raum. Mit Hilfe der Adjungierten läßt sich leicht beschreiben, wann $\overline{(\lambda - T)E} \neq E$.

Lemma 4.1.8. *Für* $\lambda \in \mathbb{K}$ *sind äquivalent:*

(i) $\lambda \in \sigma_p(T')$ *;*

(ii) $\overline{(\lambda - T)E} \neq E$ *.*

Beweis. *(ii)* $\Rightarrow$ *(i)* . Ist $\overline{(\lambda - T)E} \neq E$, so gibt es nach dem Satz von Hahn-Banach $\varphi \in E' \setminus \{0\}$, so dass $\varphi(\lambda x - Tx) = 0$ für alle $x \in E$.

Damit ist $\lambda\varphi - \varphi \circ T = 0$; d.h. $T'\varphi = \lambda\varphi$.
$(i) \Rightarrow (ii)$. Sei $\overline{(\lambda - T)E} = E$. Sei $\varphi \in E'$, so dass $T'\varphi = \lambda\varphi$. Dann ist für $x \in E$, $\varphi((\lambda - T)x) = (\lambda\varphi - T'\varphi)(x) = 0$. Aus der Dichtheit folgt $\varphi = 0$. □

Zusammenfassend können wir das Spektrum folgendermaßen schreiben:

Satz 4.1.9. *Es ist*

$$\sigma(T) = \sigma_{ap}(T) \cup \sigma_p(T') \ .$$

Dabei sollte man jedoch beachten, dass $\sigma_{ap}(T)$ und $\sigma_p(T')$ nicht disjunkt sein müssen.
Schließlich zeigen wir, dass der topologische Rand $\partial\sigma(T)$ des Spektrums immer zum approximativen Punktspektrum gehört. Dazu benutzen wir eine unmittelbare Folgerung aus Satz 4.1.1.

Satz 4.1.10. *Es gilt für alle* $\lambda \in \varrho(T)$

$$dist(\lambda, \sigma(T)) \geq \|R(\lambda, T)\| \ .$$

Insbesondere gilt: Ist $\lambda_n \in \varrho(T)$ *mit* $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda_0$ *, so dass* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|R(\lambda_n, T)\| < \infty$ *, so ist*

$$\lambda_0 \in \varrho(T) \ .$$

Die in Satz 4.1.10 formulierte Eigenschaft ist speziell für Resolventen. Sie gilt nicht allgemein für holomorphe Funktion. Zwar hat eine in einer punktierten Kreisscheibe $B(z_0, r)\backslash\{z_0\}$ definierte holomorphe Funktion eine holomorphe Fortsetzung auf die gesamte Kreisscheibe, wenn sie beschränkt ist; jedoch reicht nicht aus, dass sie auf einer gegen z_0 konvergenten Folge beschränkt ist. Das zeigt das folgende Beispiel.

Beispiel 4.1.11. *Die Funktion* $f(z) = e^{1/z}$ *hat eine nicht hebbare Singularität in* 0 *, obwohl* $|f(i/n)| = 1 \quad (n \in \mathbb{N})$ *.*

Nun können wir den Satz über den Rand des Spektrums beweisen.

Satz 4.1.12. *Es gilt* $\partial\sigma(T) \subset \sigma_{ap}(T)$ *.*

Beweis. Sei $\lambda \in \partial\sigma(T)$. Nach Satz 4.1.10 gibt es $\lambda_n \in \varrho(T)$, so dass $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \|R(\lambda_n, T)\| = \infty$. Nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit gibt es $x \in E$, so dass $\lim\limits_{n\to\infty} \|R(\lambda_n, T)x\| = \infty$, wobei wir $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegebenenfalls durch eine Teilfolge ersetzen.
Sei $y_n = R(\lambda_n, T)x/\|R(\lambda_n, T)x\|$. Dann ist $\|y_n\| = 1$ aber $\lambda y_n - Ty_n = (\lambda - \lambda_n)y_n + x/\|R(\lambda_n, T)x\|$ konvergiert gegen 0 $(n \to \infty)$. $\square$

Schließlich gehen wir nochmals auf die Adjungierte ein.

Satz 4.1.13. *Sei $T \in \mathcal{L}(E)$. Dann gilt:*

(a) T ist invertierbar genau dann, wenn T' invertierbar ist;

(b) $\sigma(T) = \sigma(T')$.

Beweis. a) Ist T invertierbar, so ist $(T^{-1})' \circ T' = (T \circ T^{-1})' = I = (T^{-1} \circ T)' = T' \circ (T^{-1})'$. Somit ist $(T^{-1})' = (T')^{-1}$. Sei umgekehrt T' invertierbar. Dann ist nach dem soeben Bewiesenen T'' invertierbar. Somit ist $\|Tx\| = \|T''j(x)\| \geq \alpha = \|j(x)\| = \alpha\|x\|$ für alle $x \in E$ (wobei $\alpha = \|(T'')^{-1}\|^{-1}$ und $j : E \to E''$ kanonisch ist). Damit ist Bild T abgeschlossen. Aus Lemma 4.1.8 folgt schließlich, dass Bild $T = E$. Damit ist T bijektiv, und somit invertierbar. $\square$

Aufgabe 4.1.14. *Benutze (4.5) um zu zeigen, dass*

a) $\varrho(T)$ offen ist;

b) $R = R(\cdot, T)$ holomorph ist und $R'(\lambda) = -R(\lambda, T)^2$;

c) und dass allgemeiner (4.2) gilt.

Aufgabe 4.1.15. *Sei $T \in \mathcal{L}(E)$, so dass $\sum\limits_{k=0}^{\infty} T^k x$ für alle $x \in E$ konvergiert. Zeige, dass $\lambda \in \varrho(T)$ und $R(\lambda, T)x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} T^k x$ für alle $x \in E$.*

Aufgabe 4.1.16. *Sei $E = \ell^p$, $1 \leq p \leq \infty$ und $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{K}$. Betrachte den Diagonaloperator $T \in \mathcal{L}(\ell^p)$ gegeben durch*

$$Tx = (\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}} .$$

a) **Zeige:** $\sigma(T) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}^-$.

b) **Zeige:** $\sigma_p(T) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$.

c) Sei $K \subset \mathbb{K}$ eine kompakte Teilmenge.
Zeige: *Es gibt einen Operator $T \in \mathcal{L}(\ell^p)$, so dass $\sigma(T) = K$.*

4.2 Kompakte Operatoren

Sei E ein Banachraum. Ist E unendlich-dimensional, ist die Einheitskugel von E nicht kompakt. Daher sind Operatoren von besonderem Interesse, die diese Situation verbessern. Sei F ein weiterer Banachraum. Mit $B_E = \{x \in E : \|x\| \le 1\}$ bezeichnen wir die Einheitskugel von E.

Definition 4.2.1. *Ein Operator $T \in \mathcal{L}(E,F)$ heißt* **kompakt***, falls $TB_E = \{Tx : \|x\| \le 1\}$ relativ kompakt in F ist. Anders ausgedrückt: T ist genau dann kompakt, wenn es zu jeder beschränkten Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gibt derart, dass $(Tx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ in F konvergiert.*

Zunächst beweisen wir einige Permanenzeigenschaften kompakter Operatoren.

Satz 4.2.2. *Die Menge $\mathcal{K}(E,F)$ aller kompakten Operatoren von E nach F ist ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{L}(E,F)$.*

Beweis. Es folgt unmittelbar aus der Definition, dass $\mathcal{K}(E,F)$ ein Unterraum von $\mathcal{L}(E,F)$ ist. Sei $T \in \overline{\mathcal{K}(E,F)}$. Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $S \in \mathcal{K}(E,F)$, so dass $\|S - T\| < \varepsilon/2$. Da S kompakt ist, wird SB_E von endlich vielen Kugeln $B(y_j, \varepsilon/2)$, $j = 1, \cdots, n$ überdeckt. Sei $x \in B_E$. Es gibt $j \in \{1, \cdots n\}$, so dass $\|Sx - y_j\| < \varepsilon/2$. Damit ist $\|Tx - y_j\| \le \|Tx - Sx\| + \|Sx - y_j\| < \varepsilon$. Also überdecken die Kugeln auch TB_E. Damit ist TB_E nach Theorem 1.5.2 relativ kompakt. □

Die folgende Idealeigenschaft folgt unmittelbar aus der Definition.

Satz 4.2.3. *Seien G_1, G_2 Banachräume, $T \in \mathcal{L}(E,F)$, $S_1 \in \mathcal{L}(G_1,E)$, $S_2 \in \mathcal{L}(F,G_2)$. Dann sind $T \circ S_1$ und $S_2 \circ T$ kompakt.*

Definition 4.2.4. *Ein Operator $T \in \mathcal{L}(E,F)$ hat endlichen Rang, falls der Bildraum endlich-dimensional ist.*

Da in endlich-dimensionalen Räumen beschränkte Mengen relativ kompakt sind, ist jeder Operator von endlichem Rang kompakt. Somit sind auch alle diejenigen Operatoren kompakt, die durch Operatoren von endlichem Rang approximiert werden können. Es war lange ein offenes Problem (das sogenannte **Approximationsproblem**,) ob jeder kompakte Operator im Abschluß der Operatoren von endlichem Rang liegt. Für viele gängige Banachräume ist dies tatsächlich der Fall. Schließlich wurde 1974 ein Gegenbeispiel von Enflo angegeben.

Operatoren endlichen Ranges lassen sich einfach darstellen. Seien $x_i' \in E'$, $y_i \in F$, $i = 1, \cdots n$. Dann definiert

$$Tx = \sum_{i=1}^{n} x_i'(x) y_i \tag{4.6}$$

einen Operator von endlichem Rang. Wir bezeichnen ihn mit

$$T = \sum_{i=1}^{n} x_i' \otimes y_i \ . \tag{4.7}$$

Umgekehrt, läßt sich jeder Operator T von endlichem Rang so darstellen. Sei etwa $\{y_1, \cdots y_n\}$ eine Basis von Bild T . Dann gibt es für jedes $x \in E$ genau einen Vektor $(\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)) \in \mathbb{K}^n$, so dass $Tx = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i(x) y_i$. Aus der Linearität und Stetigkeit von T folgt, dass $\varphi_i \in E'$ $(i = 1 \cdots n)$.

Man sieht leicht, dass die Adjungierte T' von T durch $T'y' = \sum\limits_{i=1}^{n} y'(y_i) x_i$ gegeben ist (d.h. $T' = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \otimes x_i'$, wobei wir F mit einem Teilraum von F'' identifizieren). Insbesondere ist auch T' kompakt. Allgemeiner gilt:

Satz 4.2.5 (Schauder)**.** *Sei $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Dann ist $T \in \mathcal{K}(E, F)$ genau dann kompakt, wenn $T' \in \mathcal{K}(F', E')$.*

Beweis. a) Sei $T \in \mathcal{K}(E, F)$. Sei $\varphi_n \in F'$, $\|\varphi_n\| \leq 1$. Sei $K = \overline{TB_E}$. Dann ist K ein kompakter metrischer Raum. Die Folge $(\varphi_{n_{|K}})_{n \in \mathbb{N}} \subset C(K)$

ist gleichstetig und beschränkt. Nach dem Satz von Arzela-Ascoli besitzt sie eine konvergente Teilfolge $(\varphi_{n_k}{}_{|K})_{k\in\mathbb{N}}$. Damit ist aber $T'\varphi_{n_k} = \varphi_{n_k} \circ T$ eine Cauchyfolge in E' . Wir haben gezeigt, dass T' kompakt ist.
b) Sei $T' \in \mathcal{K}(F', E')$. Nach a) ist $T'' \in \mathcal{K}(E'', F'')$. Damit ist $T'' \circ j : E \to F''$ nach Satz 4.2.3 kompakt (wobei $j : F \to F''$ kanonisch ist). Man sieht leicht, dass $T'' \circ j = T$. □

Wir betrachten nun ein Beispiel, das in Anwendungen häufig ist.

Beispiel 4.2.6 (Kernoperatoren)**.** *Sei* $-\infty < a < b < \infty$ *und* $k \in C([a, b] \times [a, b])$ *. Dann definiert*

$$(Tf)(x) = \int_a^b k(x, y)f(y)\, dy$$

einen kompakten Operator $T \in \mathcal{K}(C[a, b])$ *.*

Beweis. Sei $H = \{Tf : \|f\|_\infty \leq 1\} \subset C[a, b]$. Sei $x_0 \in [a, b]$. Für $h = Tf \in H$ ist $\|h\|_\infty \leq \sup\limits_{x\in[a,b]} \int_a^b |k(x, y)|\, dy < \infty$. Ferner ist

$$\begin{aligned} |h(x) - h(x_0)| &\leq \int_a^b |k(x, y) - k(x_0, y)|\, |f(y)|\, dy \\ &\leq \int_a^b |k(x, y) - k(x_0, y)|\, dy\ . \end{aligned}$$

Da k gleichmäßig stetig ist, gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $|x - x_0| \leq \delta$ impliziert $|k(x, y) - k(x_0, y)| \leq \varepsilon$ für alle $y \in [a, b]$. Damit ist $|h(x) - h(x_0)| \leq \varepsilon(b - a)$, wenn $|x - x_0| \leq \delta$. Wir haben gezeigt, dass H gleichstetig in x_0 ist. Die Behauptung folgt somit aus dem Satz von Arzela-Ascoli. □

Aufgabe 4.2.7. *Sei* $T \in \mathcal{L}(E), E$ *ein Banachraum.*
a) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Es gibt $c > 0$ *so dass* $\|Tx\| \geq c\|x\|\ (x \in E)$ *.*

(ii) T *ist injektiv und Bild* T *ist abgeschlossen.*

b) Zeige, dass die Menge

$$C := \{T \in \mathcal{L}(E) : T \text{ injektiv } TE \text{ abgeschlossen}\} \text{ offen in } \mathcal{L}(E) \text{ ist }.$$

c) Zeige, dass $\sigma_{ap}(T)$ *abgeschlossen ist.*

4.3 Spektraltheorie kompakter Operatoren

Sei E ein Banachraum über $\mathbb{K}$. Gewisse Eigenschaften, die für das Lösen von Gleichungssystemen für lineare Abbildungen in endlich-dimensionalen Räumen wichtig sind, übertragen sich auf Operatoren der Form $T = I - K$ wobei K ein kompakter Operator auf E ist. Wir beschreiben zunächst Bild und Kern solcher Operatoren.

Lemma 4.3.1. *Sei* $K \in \mathcal{K}(E)$, $T = I - K$. *Dann ist* $\ker T$ *ein endlich-dimensionaler und Bild* T *ist abgeschlossener Teilraum von* E.

Beweis. a) Sei $F = \ker T$. Dann ist F ein abgeschlossener Teilraum von E und $Tx = x$ auf F. Damit ist die Identität auf F kompakt. Aus Satz 2.2.3 folgt, dass $\dim F < \infty$.
b) Da $\ker T$ endlich-dimensional ist, gibt es einen abgeschlossenen Teilraum G von E, so dass $\ker T \oplus G = E$. Die Einschränkung T_0 von T auf G ist injektiv und Bild $T =$ Bild T_0. Sei $y \in \overline{\text{Bild } T}$. Dann gibt es $x_n \in G$, so dass

$$x_n - Kx_n = Tx_n \to y \quad (n \to \infty)\,. \tag{4.8}$$

Wir zeigen, dass x_n beschränkt ist. Andernfalls können wir nämlich (nach evtl. Extraktion einer Teilfolge) annehmen, dass $\|x_n\| \to \infty \quad (n \to \infty)$. Sei $u_n = x_n/\|x_n\|$. Dann gilt

$$u_n - Ku_n \to 0 \quad (n \to \infty)\,. \tag{4.9}$$

Da K kompakt ist, finden wir eine Teilfolge $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, so dass $u = \lim_{k\to\infty} Ku_{n_k}$ existiert. Wegen (4.9) ist dann $u = \lim_{k\to\infty} u_{n_k}$. Somit ist $\|u\| = 1$ und

$Ku = u$, also $Tu = 0$. Da $u \in G$ ist das ein Widerspruch zur Injektivität von T_0 . Damit ist bewiesen, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Da K kompakt ist, finden wir eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, so dass $(Kx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Da nach (4.8), $\lim_{k\to\infty}(x_{n_k} - Kx_{n_k}) = y$, konvergiert auch $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, sagen wir gegen x . Dann ist $x - Kx = y$. Also ist $y \in$ Bild T . □

Theorem 4.3.2 (Fredholmsche Alternative)**.** *Sei* $T = I - K$ *mit* $K \in \mathcal{K}(E)$ *. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) T *ist invertierbar;*

(ii) T *ist injektiv;*

(iii) T *ist surjektiv.*

Beweis. $(ii) \Rightarrow (iii)$: Sei T injektiv. Dann ist $E_1 := TE$ ein abgeschlossener Teilraum von E . Angenommen, $E_1 \neq E$. Definiere $E_{n+1} := TE_n = T^{n+1}E$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist E_{n+1} ein abgeschlossener Teilraum, der unter K und T invariant ist. Es gilt $E_{n+1} \subset E_n$ und $E_{n+1} \neq E_n$. Es gibt nämlich $y \in E$, so dass $y \neq Tx$ für alle $x \in E$. Da T injektiv ist, ist damit $T^n y \neq T^{n+1}x$ für alle $x \in E$. Damit ist $T^n y \in E_n \setminus E_{n+1}$.
Nach dem Lemma von Riesz 2.2.4 gibt es $u_n \in E_n$, so dass $\|u_n\| = 1$ und $d(u_n, E_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$. Sei $m > n$. Dann ist Dann ist $Tu_n + u_m - Tu_m \in E_{n+1}$. Somit ist $\|Ku_n - Ku_m\| = \|u_n - (Tu_n + u_m - Tu_m)\| \geq 1/2$. Damit hat $(Ku_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge, ein Widerspruch zur Kompaktheit von K . Wir haben gezeigt, dass $E = E_1$; d.h. T ist surjektiv.
$(iii) \Rightarrow (ii)$: Sei T surjektiv. Dann ist $T' = I - K'$ injektiv. Da nach dem Satz von Schauder K' kompakt ist, folgt aus der Implikation, die wir eben bewiesen haben, dass T' surjektiv ist. Damit ist T' invertierbar, also auch T (nach Satz 4.1.13). Die übrigen Implikationen sind klar. □

Theorem 4.3.2 besagt, dass für die Gleichung

$$x - Kx = y \tag{4.10}$$

mit gegebenem $y \in E$ und Unbekannter $x \in E$ folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) Für jedes $y \in E$ gibt es genau eine Lösung $x \in E$;

(ii) für jedes $y \in E$ gibt es höchstens eine Lösung $x \in E$;

(iii) für jedes $y \in E$ gibt es eine Lösung $x \in E$.

Diese erstaunliche Äquivalenz wird als **"Fredholmsche Alternative"** bezeichnet. Sie läßt sich auch spektral-theoretisch formulieren: Das Spektrum eines kompakten Operators besteht nur aus Eigenwerten und der 0 . Genauer gilt folgendes:

Theorem 4.3.3 (Spektrum kompakter Operatoren)**.** *Sei K ein kompakter Operator auf einem unendlich-dimensionalen komplexen Banachraum E . Dann gilt:*

(a) $0 \in \sigma(K)$ *;*

(b) $\sigma(K) \setminus \{0\} \subset \sigma_p(K)$ *;*

(c) $\sigma(K)$ *ist endlich oder es gibt eine Nullfolge* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *, so dass*

$$\sigma(K) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} .$$

Beweis. a) Wäre $0 \notin \sigma(K)$, so wäre $I = K \cdot K^{-1}$ kompakt nach Satz 4.2.3. Damit wäre E nach Satz 2.2.3 endlich dimensional, ein Widerspruch.
b) Sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, so dass $\lambda \notin \sigma_p(K)$. Dann ist $(I - \frac{K}{\lambda}) = \frac{1}{\lambda}(\lambda - K)$ injektiv. Nach Theorem 4.3.2 ist $(I - \frac{K}{\lambda})$ invertierbar, also auch $(\lambda - K)$.
c) Sei $\varepsilon > 0$. Angenommen, die Menge $\{\lambda \in \sigma(K) : |\lambda| \geq \varepsilon\}$ ist unendlich. Dann gibt es nach b) $\lambda_n \in \sigma_p(K)$, so dass $|\lambda_n| \geq \varepsilon$. Wir können annehmen, dass $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und $\lambda_n \neq \lambda_m$ für $n \neq m$ (sonst nehmen wir eine Teilfolge). Es gibt $e_n \in E$, so dass $\|e_n\| = 1$ und $Ke_n = \lambda_n e_n$. Die Vektoren $\{e_1, \cdots e_n\}$ sind linear unabhängig für jedes $n \in \mathbb{N}$. Sei $E_n = \mathrm{lin}\{e_1, \dots e_n\}$. Nach dem Lemma von Riesz gibt es $u_n \in E_n$ mit $\|u_n\| = 1$ und $d(u_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$. Beachte, dass $Ku_n - \lambda_n u_n \in E_{n-1}$. (Man schreibe $u_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$. Dann ist $Ku_n - \lambda_n u_n = \sum\limits_{j=1}^{n} (\alpha_j \lambda_j e_j - \lambda_n \alpha_j e_j) = \sum\limits_{j=1}^{n-1} \alpha_j(\lambda_j - \lambda_n)e_j)$. Damit ist für $2 \leq m < n$,

$$\|\frac{Ku_n}{\lambda_n} - \frac{Ku_m}{\lambda_m}\| = \|\frac{Ku_n - \lambda_n u_n}{\lambda_n} - \frac{Ku_m}{\lambda_m} + u_n\| \geq \frac{1}{2} ,$$

da $Ku_n - \lambda_n u_n \in E_{n-1}$ und $\frac{Ku_m}{\lambda_m} \in E_m \subset E_{n-1}$. Folglich hat $(\frac{Ku_n}{\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge. Da $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, kann auch $(Ku_n)_{n\in\mathbb{N}}$

keine konvergente Teilfolge haben. Das ist ein Widerspruch zur Kompaktheit von K . □

Aufgabe 4.3.4 (Volterra Operator)**.** *Sei* $E = C[0,1]$. *Definiere* $T \in \mathcal{L}(C[0,1])$ *durch*

$$Tf(x) = \int_0^x f(y)\, dy \ .$$

a) Zeige, dass T *kompakt ist.*

b) Zeige, dass $\sigma(T) = \{0\}$.

Anleitung: Bemerke, dass $\sigma(T) \setminus \{0\} \subset \sigma_p(T)$.

Kapitel 5

Hilberträume

Wegen ihrer besonderen geometrischen und analytischen Eigenschaften bilden Hilberträume die wichtigste Klasse von Banachräumen. Wir beschränken uns hier auf separable Räume; nur diese treten in den Anwendungen auf, die wir im Auge haben. Im Mittelpunkt der Theorie steht der Projektionssatz (§ 5.2). Eine konkrete Realisierung dieses Satzes ist die Konstruktion einer Orthonormalbasis in jedem separablen Prähilbertraum (§ 5.3). Fourierreihen bilden ein interessantes Anwendungsbeispiel (§ 5.5). Schließlich beweisen wir den wichtigen Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren (§ 5.4).

5.1 Prähilberträume

Das von $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ bekannte Skalarprodukt führt zu folgender axiomatischen Definition.

Definition 5.1.1. *Sei E ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $(\,.|.\,) : E \times E \to \mathbb{K}$, $(x,y) \mapsto (x\,|\,y)$ heißt* **Skalarprodukt***, falls für alle $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:*

$$\left.\begin{array}{l} (a)\ (x+y\,|\,z) = (x\,|\,z) + (y\,|\,z) \\ (b)\ (\lambda x\,|\,z) = \lambda (x\,|\,z) \end{array}\right\} \textit{(Linearität)};$$

(c) $(x\,|\,y) = \overline{(y\,|\,x)}$ *(Symmetrie);*

(d) $(x\,|\,x) > 0$ *falls* $x \neq 0$ *(Positive Definitheit).*

Man nennt dann $(E, (\,.|.\,))$ einen **Prähilbertraum***. Sei $(E, (\,.|.\,))$ ein*

Prähilbertraum.

Wir werden Eigenschaften des Skalarprodukts beschreiben und insbesondere E auf natürliche Weise normieren. Aus der Definition erhalten wir unmittelbar folgende einfache Eigenschaften für $x, y, z \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$(x \mid y + z) = (x \mid y) + (x \mid z) \; ; \tag{5.1}$$

$$(x \mid \lambda y) = \bar{\lambda}(x \mid y) \; . \tag{5.2}$$

Allgemeiner gilt

$$(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \mid \sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \overline{\mu_j} (x_i \mid y_j) \tag{5.3}$$

für $x_1, \dots x_n$, $y_1, \dots y_m \in E$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots \mu_m \in \mathbb{K}$. Wegen Eigenschaft (d) können wir

$$\|x\| = (x \mid x)^{\frac{1}{2}}$$

für $x \in E$ definieren. Es ist klar, dass

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \; ; \quad \text{und} \tag{5.4}$$

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \quad (\lambda \in \mathbb{K}) \; . \tag{5.5}$$

Wir werden nach einer kleinen Vorbereitung die Dreiecksungleichung beweisen, so dass $\| \; \|$ eine Norm auf E ist.

Beispiel 5.1.2. (a) Sei $E = \mathbb{R}^2$. Das Skalarprodukt $(x \mid y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$ kann geometrisch interpretiert werden: Sei $\|x\| = \|y\| = 1$. Dann können wir $x = (\cos\theta_1, \sin\theta_1)$, $y = (\cos\theta_2, \sin\theta_2)$ schreiben. Damit ist $(x \mid y) = (\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2) = \cos(\theta_1 - \theta_2)$, wobei $\theta_1 - \theta_2$ der Winkel zwischen den beiden Vektoren x und y ist.
(b) Auf $E = \mathbb{K}^N$ betrachten wir allgemeiner das kanonische Skalarprodukt

$$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{N} x_i \overline{y_i} \; .$$

Damit ist $\|x\| = (\sum\limits_{i=1}^{N} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$ die **euklidische Norm**.
(c) Auf $C[a,b]$ definiert

$$(f\,|\,g) = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt$$

ein Skalarprodukt. Die zugehörige Norm wird mit

$$\|f\|_2 = \sqrt{(f\,|\,f)} = (\int_a^b |(t)|^2\,dt)^{\frac{1}{2}}$$

bezeichnet.

Sei $(E, (\,|\,))$ ein Prähilbertraum im folgenden. Motiviert durch Beispiel 5.1.2 (c) nennen wir zwei Vektoren $x, y \in E$ **orthogonal**, falls $(x\,|\,y) = 0$. Wir schreiben auch $x \perp y$. Aus der Definition erhalten wir unmittelbar den folgenden Satz, der im Fall von Beispiel 5.1.2 (a) gerade der Satz von Pythagoras für rechtwinklige Dreiecke ist.

Satz 5.1.3 (Satz von Pythagoras)**.** *Seien* $x, y \in E$ *orthogonal. Dann gilt*

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \,.$$

Weiter gilt folgendes:

Satz 5.1.4 (orthogonale Projektionen von Rang 1)**.** *Sei* $y \in E$, $\|y\| = 1$. *Seien* $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$. *Dann gilt:*

$$(x - \lambda y) \perp y \Leftrightarrow \lambda = (x\,|\,y)\,.$$

Beweis. Es ist $(x - \lambda y\,|\,y) = (x\,|\,y) - \lambda(y\,|\,y) = (x\,|\,y) - \lambda$. □

Dieser Satz läßt sich ebenfalls geometrisch interpretieren. Sei $G = \{\lambda \cdot y : \lambda \in \mathbb{K}\}$ der durch y definierte Teilraum, wobei $\|y\| = 1$. Sei $x \in E$. Dann ist

$$Px := (x\,|\,y)y \in G \quad \text{und} \tag{5.6}$$

$$(x - Px) \perp y \,. \tag{5.7}$$

Wir nennen $P : E \to E$ die **orthogonale Projektion** von E auf G . Es ist eine lineare Abbildung mit $P^2 = P$. Man schreibt sie oft auch folgendermaßen:

$$P =: y \otimes y \,. \tag{5.8}$$

Mit Hilfe von (1.7) können wir nun leicht die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung (1.9) beweisen.

Satz 5.1.5 (Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung)**.** *Sei $x, y \in E$. Dann gilt*

$$|(x \,|\, y)| \le \|x\| \cdot \|y\| \,. \tag{5.9}$$

Ferner gilt das Gleichheitszeichen in (1.9) genau dann wenn $\{x, y\}$ linear unabhängig sind.

Beweis. Wir können o. B. d. A. annehmen, dass $\|y\| = 1$. (Für $y = 0$ ist die Aussage trivial; und der allgemeine Fall ergibt sich, indem man $\frac{y}{\|y\|}$ statt y betrachtet). Da $(x - (x \,|\, y)y) \perp y$ ergibt sich aus dem Satz von Pythagoras:

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \|x - (x \,|\, y)y + (x \,|\, y)y\|^2 \\ &= \|x - (x \,|\, y)y\|^2 + \|(x \,|\, y)y\|^2 \\ &= \|x - (x \,|\, y)y\|^2 + |(x \,|\, y)|^2 \\ &\le |(x \,|\, y)|^2 \,, \end{aligned}$$

d.h. (1.9) (da $\|y\| = 1$) . Das Gleichheitszeichen gilt genau dann wenn $x = (x \,|\, y)y$. Ist schließlich $x = \alpha y$ für ein $\alpha \in \mathbb{K}$, so ist $|(x \,|\, y)| = |\alpha| = \|x\| \cdot \|y\|$. □

Aus der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung ergibt sich unmittelbar die Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y \,|\, x + y) = (x \,|\, x) + (x \,|\, y) + (y \,|\, x) + (y \,|\, y) \\ &= \|x\|^2 + (x \,|\, y) + \overline{(x \,|\, y)} + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\,(x \,|\, y) + \|y\|^2 \\ &\le \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \,. \end{aligned}$$

Damit ist bewiesen, dass $\|x\| = \sqrt{(x\,|\,x)}$ eine Norm auf E definiert. Wir werden immer diese kanonische Norm auf einem Prähilbertraum betrachten. Das Skalarprodukt ist dann eine stetige Abbildung $(\,.|.\,) : E \times E \to \mathbb{K}$.

Lemma 5.1.6. *Sei* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ *in* E *. Dann gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n\,|\,y_n) = (x\,|\,y)$ *.*

Beweis. $|(x_n\,|\,y_n) - (x\,|\,y)| = |(x_n - x\,|y_n) + (x\,|\,y_n - y)| \le |(x_n - x\,|\,y_n)| + |(x\,|\,y_n - y)| \le \|x_n - x\|\;\|y\| + \|x\|\;\|y_n - y\|$ nach der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

5.2 Orthogonale Projektionen

Sei $(E, (\;|\;))$ ein Prähilbertraum. Ist $A \subset E$ eine Teilmenge, so ist

$$A^\perp := \{x \in E : x \perp a \quad \text{für alle} \quad a \in A\} \tag{5.10}$$

ein abgeschlossener Teilraum von E (benutze Lemma 5.1.6).

Satz 5.2.1. *Sei* $F \subset E$ *ein Teilraum. Sei* $x \in E$, $y_0 \in F$ *. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) $x - y_0 \in F^\perp$ *;*

(ii) $\|x - y_0\| = \min\{\|x - y\| : y \in F\}$ *.*

Beweis. *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*. Sei $x - y_0 \in F^\perp$. Dann folgt aus dem Satz von Pythagoras für $y \in F$, $\|x-y\|^2 = \|(x-y_0)+(y_0-y)\| = \|x-y_0\|^2 + \|y_0 - y\|^2 \ge \|x - y_0\|^2$.
(ii) $\Rightarrow$ *(i)*. Sei $y \in F$. Sei $x_1 = x - y_0$. Wir müssen zeigen, dass $x_1 \perp y$. Dazu können wir annehmen, dass $\|y\| = 1$. Aus der Voraussetzung folgt

$$\begin{aligned}
&\|x_1\|^2 = \|x - y_0\|^2 \\
&\le \|x - y_0 - (x_1\,|\,y)y\|^2 \\
&= \|x_1\|^2 - (x_1\,|\,(x_1\,|\,y)y) - ((x_1\,|\,y)y\,|\,x_1) + ((x_1\,|\,y)y\,|\,(x_1\,|\,y)y) \\
&= \|x_1\|^2 - \overline{(x_1\,|\,y)}(x_1\,|\,y) - (x_1\,|\,y)(y\,|\,x_1) + (x_1\,|\,y)\overline{(x_1\,|\,y)}(y\,|\,y) \\
&= \|x_1\|^2 - |(x_1\,|\,y)|^2 .
\end{aligned}$$

Damit ist $(x_1 \,|\, y) = 0$. □

Wir wollen nun zeigen, dass das Minimum in *(ii)* existiert, falls der Unterraum F vollständig ist. Aus den Eigenschaften des Skalarproduktes erhält man folgende Identität.

Lemma 5.2.2 (Parallelogrammgesetz)**.**

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad (x, y \in E) .$$

Damit können wir nun den folgenden wichtigen Satz beweisen.

Theorem 5.2.3 (Projektionssatz)**.** *Sei E ein Prähilbertraum und $F \subset E$ ein vollständiger Teilraum. Dann gilt*

$$E = F \oplus F^\perp . \tag{5.11}$$

Beweis. Es folgt aus der Definitheit des Skalarproduktes, dass $F \cap F^\perp = \{0\}$. Sei $x \in E$. Es bleibt zu zeigen, dass $y_0 \in F$ existiert, so dass $x - y_0 \in F^\perp$, oder nach Satz 5.2.1, $\|x - y_0\| = d$, wobei

$$d := \inf\{\|x-y\| : y \in F\} .$$

Sei $y_n \in F$, so dass $\lim\limits_{n\to\infty} \|x - y_n\| = d$. Aus dem Parallelogrammgesetz erhält man

$$\begin{aligned}
\|y_n - y_m\|^2 &= \|(y_n - x) - (y_m - x)\|^2 \\
&= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - \|(y_n - x) + (y_m - x)\|^2 \\
&= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - \|y_n + y_m - 2x\|^2 \\
&= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\|\frac{y_n + y_m}{2} - x\|^2 \\
&\leq 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4d^2 ,
\end{aligned}$$

wobei sich die letzte Ungleichung aus der Definition von d ergibt. Damit ist $\lim\limits_{n,m\to\infty} \|y_n - y_m\|^2 = 0$.

Wir haben gezeigt, dass $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge bildet. Nach Voraussetzung existiert $y_0 = \lim\limits_{n\to\infty} y_n \in F$. Es ist dann $\|x - y_0\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|x - y_n\| = d$. □

Der Projektionssatz besagt folgendes: Zu jedem $x \in E$ gibt es genau ein Paar $(y, z) \in F \times F^\perp$, so dass $x = y + z$. Die Abbildung $P : E \to E$, die jedem x dieses $y \in F$ zuordnet, heißt **die orthogonale Projektion von** E **auf** F. Damit ist $P : E \to E$ linear, $P^2 = P$. Aus dem Satz von Pythagoras folgt $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 \geq \|y\|^2 = \|Px\|^2$. Also ist $P \in \mathcal{L}(E)$ und $\|P\| \leq 1$.

Definition 5.2.4. *Ein* **Hilbertraum** *ist ein vollständiger Prähilbertraum.*

Korollar 5.2.5. *Sei H ein Hilbertraum.*

a) Sei $A \subset H$. Dann ist

$$\overline{lin}\, A = A^{\perp\perp} .$$

b) Insbesondere gilt für einen Teilraum F von H,

$$\bar{F} = F^{\perp\perp} .$$

c) Somit ist F genau dann dicht wenn $F^\perp = \{0\}$.

Beweis. 1. Sei F ein abgeschlossener Teilraum von H. Nach dem Projektionssatz ist $H = F \oplus F^\perp$. Daraus folgt, dass $F = F^{\perp\perp}$. Denn man hat immer $F \subset F^{\perp\perp}$. Sei nun $x \in F^{\perp\perp}$. Schreibe $x = x_1 + x_2 \in F \oplus F^\perp$. Dann ist $\|x_2\|^2 = (x_2 \,|\, x) - (x_2 \,|\, x_1) = 0$. Also $x_2 = 0$ und $x \in F$.
2. Ist $A \subset H$, so ist $(\overline{\operatorname{lin}} A)^\perp = A^\perp$. Nach 1. ist also $\overline{\operatorname{lin}} A = (\overline{\operatorname{lin}} A)^{\perp\perp} = A^{\perp\perp}$. Die Aussagen b) und c) folgen aus a). □

Anmerkung 5.2.6. Der Projektionssatz impliziert insbesondere, dass jeder abgeschlossene Teilraum eines Hilbertraumes projezierbar ist. Diese Eigenschaft ist charakteristisch für Hilberträume: Ist $E, \|\ \|)$ ein Banachraum, in dem jeder abgeschlossene Teilraum projezierbar ist, so gibt es ein Skalarprodukt auf E, so dass die Norm zu der vom Skalarprodukt kommenden Norm $\|x\|_0 := \sqrt{(x \,|\, x)}$ äquivalent ist (siehe [LT]).

Beispiel 5.2.7 (Der Hilbertraum ℓ^2). Für $x, y \in \ell^2$ ist nach der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung

$$\sum_{n=1}^{N} |x_n y_n| \leq (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2)^{\frac{1}{2}} \quad (N \in \mathbb{N}) .$$

Damit ist $(x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1$ und

$$(x \,|\, y) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$$

definiert ein Skalarprodukt auf ℓ^2 . Die Norm ist gegeben durch

$$\|x\| = \sqrt{(x \,|\, x)} = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_2 .$$

Wir hatten schon gesehen, dass ℓ^2 bzgl. dieser Norm vollständig ist. Die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung

$$|\sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}| \leq (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2)^{\frac{1}{2}}$$

ist identisch mit der Hölder-Ungleichung für $p = 2$. Als nächstes bestimmen wir den Dualraum eines Hilbertraumes.

Sei H ein Hilbertraum. Ist $x \in H$, so definiert $\Phi_x : y \mapsto (y \,|\, x)$ eine Linearform auf H . Wegen der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung ist $|\varphi_x(y)| \leq \|x\| \, \|y\|$. Somit ist Φ_x stetig und $\|\Phi_x\| \leq \|x\|$. Ist $x \neq 0$, so hat $x_1 := \|x\|^{-1} x$ Norm 1 und es ist $\Phi_x(x_1) = \|x\|$. Damit ist $\|\varphi_x\| = \|x\|$. Die Abbildung $x \mapsto \Phi_x : H \to H'$ ist also linear und isometrisch. Der folgende Satz besagt, dass sie auch surjektiv ist. Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so ist also $\Phi : x \mapsto \Phi_x$ ein linearer, isometrischer Isomorphismus von H auf H . Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so ist Φ **konjugiert linear**, d.h. $\Phi_{(x+y)} = \Phi_x + \Phi_y$ und $\Phi_{\lambda x} = \bar{\lambda} \Phi_x$.

Satz 5.2.8 (Satz von Riesz-Fréchet). *Sei H ein Hilbertraum und $\varphi \in H'$. Dann gibt es genau ein $x \in H$, so dass $\varphi(y) = (y \,|\, x)$ für alle $y \in H$. Es ist $\|\varphi\| = \|x\|$.*

Beweis. Da die Abbildung $x \mapsto \Phi_x$ isometrisch ist, sind Eindeutigkeit und die letzte Aussage schon bewiesen. Sei $\varphi \in H'$, $\varphi \neq 0$. Dann ist $F = \ker \varphi$ ein abgeschlossener echter Teilraum von H. Aus dem Projektionssatz folgt, dass $F^\perp \neq \{0\}$. Wähle $z \in F^\perp$ mit $\varphi(z) = 1$. Wir zeigen, dass $\varphi = \Phi_x$ mit $x = z/\|z\|^2$. Sei $y \in H$. Dann ist $y - \varphi(y)z \in \ker \varphi = F$. Da $z \in F^\perp$, folgt dass $0 = (y - \varphi(y)z \,|\, z) = (y \,|\, z) - \varphi(y)\|z\|^2$. Also ist $\varphi(y) = (y \,|\, z/\|z\|^2)$. □

Korollar 5.2.9. *Jeder Hilbertraum ist reflexiv.*

Der Satz von Riesz-Fréchet hat große Bedeutung in der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen. Er liefert auf elegante Weise schwache Lösungen von Randwertaufgaben.

Aufgabe 5.2.10 (Polarisationsidentität)**.** *a) Sei E ein Prähilbertraum. Zeige:*

$$(x \,|\, y) = \frac{1}{2}\{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\} \quad \textit{falls} \quad \mathbb{K} = \mathbb{R}\,; \tag{5.12}$$

$$(x \,|\, y) = \frac{1}{4}\{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\} \tag{5.13}$$

für alle $x, y \in E$.
b) Sei $(E, \|\ \|)$ ein normierter Vektorraum, in dem das Parallelogrammgesetz gilt. Zeige: Es gibt ein Skalarprodukt $(\ .|.\ )$ auf E, so dass $\|x\| = \sqrt{(x \,|\, x)}$ für alle $x \in E$.

Aufgabe 5.2.11. *Sei E ein Prähilbertraum, $P \in \mathcal{L}(E)$, $P^2 = P$, $F = PE$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:*

(i) $\|P\| \leq 1$ *;*

(ii) $(Px \mid y) = (x \mid Py)$ *für alle* $x, y \in E$ *;*

(iii) P *ist die orthogonale Projektion auf* F *.*

Aufgabe 5.2.12. *Sei $m = (m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge derart dass $\inf_{n\in\mathbb{N}} m_n > 0$. Setze*

$$\ell^2_m := \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K} : \sum_{n\in\mathbb{N}} m_n |x_n|^2 < \infty\}\ .$$

Zeige: ℓ^2_m ist ein Hilbertraum bzgl. des Skalarproduktes

$$(x \mid y) = \sum_{n=1} m_n x_n \bar{y_n}\ .$$

Anleitung: *Zeige, dass die Abbildung*

$$Ux = (\sqrt{m_n}\, x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

ein isometrischer Isomorphismus von ℓ^2_m auf ℓ^2 ist.

Aufgabe 5.2.13. *Seien* H_1 *und* H_2 *Hilberträume. Zeige, dass* $H_1 \times H_2 = H$ *ein Hilbertraum ist bzgl. des Skalarproduktes*

$$((x_1, x_2) \mid (y_1, y_2))_H := (x_1 \mid y_1)_{H_1} + (x_2 \mid y_2)_{H_2} \ .$$

Aufgabe 5.2.14. *Sei* $H = \{x \in \ell^2 : (n(x_{2n} + x_{2n+1}))_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2\}$ *. a) Zeige, dass* H *ein Hilbertraum ist bzgl. des Skalarproduktes*

$$(x \mid y)_H = (x \mid y)_{\ell^2} + \sum n^2(x_{2n} + x_{2n+1}(\bar{y_{2n}} + \bar{y_{2n+1}}) \ .$$

Anleitung: *Zeige, dass die Abbildung*

$$U : x \mapsto (x, x) : H \to \ell^2 \times \ell^2_m$$

isometrisch ist und Bild U *abgeschlossen in* H *ist, wobei* m *geeignet gewählt ist (vgl. Aufgabe 5.2.12). b) Sei* $F = \{x \in H : x_{2n+1} = 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}\}$, $G = \{x \in H : x_{2n} = 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}\}$ *. Zeige:* $F + G \neq H$ *.*
c) Bestimme $F^\perp$ *.*

5.3 Orthonormalbasen

Sei E ein Prähilbertraum. Eine Familie $(e_i)_{i\in I}$ in E heißt **orthonormal**, wenn

$$(e_i \,|\, e_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{wenn} \quad i = j \\ 0 & \text{wenn} \quad i \neq j \ . \end{cases}$$

Beispiel 5.3.1. *a) Sei* $E = \mathbb{K}^N$ *. Die natürliche Basis* $\{e_1, \dots e_N\}$ *ist orthonormal.*

b) Sei $E = \ell^2$, $e_n = (0 \dots 0\ 1\ 0 \dots) \in E$ (wobei die 1 an der n-ten Stelle steht). Dann ist $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ orthonormal.
Sei $\{e_1, \dots e_n\}$ orthonormal in E .
Ist $x = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j e_j$, so ist

$$(x|e_i) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (e_j|e_i) = \lambda_i \ .$$

Insbesondere ist $\{e_1 \dots e_n\}$ linear unabhängig.

Der aufgespannte Raum $F = \{e_1 \dots e_n\}$ hat also die Dimension n und ist damit vollständig. Wir bestimmen die orthogonale Projektion auf F .

Satz 5.3.2. *Sei* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *orthonormal in* E *und sei* $F = lin\,\{e_1, \ldots e_n\}$. *Dann ist die orthogonale Projektion* P *auf* F *gegeben durch*

$$P = \sum_{k=1}^{n} e_k \otimes e_k \ , \tag{5.14}$$

d.h. es ist $Px = \sum\limits_{k=1}^{n} (x|e_k)e_k$.

Beweis. Sei P durch (5.14) gegeben. Dann ist $Px \in F$ und $(x - Px|e_i) = (x|e_i) - \sum\limits_{k=1}^{n} (x|e_k)(e_k|e_i) = (x|e_i) - (x|e_i) = 0$. Also ist $x - Px \in F^{\perp}$. D.h. $Px + (x - Px) \in F \oplus F^{\perp}$ ist die orthogonale Zerlegung von x . □

Durch das folgende Verfahren kann man sich leicht endliche Orthogonale Systeme herstellen.

Satz 5.3.3 (Orthonormalisierung)**.** *Sei* E *ein Prähilbertraum und sei*

$$\{u_1, \ldots, u_n\} \subset E$$

linear unabhängig. Dann gibt es $\{e_1, \ldots e_n\}$ *orthonormal, so dass*

$$lin\,\{u_1 \ldots u_k\} = lin\,\{e_1 \ldots e_k\}$$

für $1 \leq k \leq n$.

Beweis. Setze $e_1 = \|u_1\|^{-1}u_1$. Sind $e_1, \ldots e_k$ konstruiert, wobei $k < n$, so setze $w_{k+1} = u_{k+1} - \sum\limits_{j=1}^{k} (u_{k+1}|e_j)e_j$. Dann ist $(w_{k+1}|e_i) = (u_{k+1}|e_i) - \sum\limits_{j=1}^{k} (u_{k+1}|e_j)(e_j|e_i) = 0$, $i = 1 \ldots k$. Dann ist $w_{k+1} \neq 0$ (andernfalls ist $u_{k+1} \in \mathrm{lin}\,\{e_1, \ldots e_k\} = \mathrm{lin}\,\{u_1, \ldots u_k\}$) . Setze $e_{k+1} = \|w_{k+1}\|^{-1}w_{k+1}$. □

Insbesondere besitzt also jeder endlich-dimensionale Prähilbertraum eine Basis, die orthonormal ist. Wir betrachten nun unendlich-dimensionale Räume.

Definition 5.3.4. *Eine Familie* $(e_i)_{i\in I}$ *heißt* **Orthonormalbasis** *von* E *, (abgekürzt: ON-Basis), falls sie orthonormal ist und*

$$\overline{lin}\ \{e_i : i \in I\} = E \quad (\textit{Totalität}) \ . \tag{5.15}$$

Zum Beispiel bilden die Vektoren $e_n = (0 \dots 010 \dots)$ (1 an der n -ten Stelle) eine ON-Basis von ℓ^2 . Wir nennen sie die **natürliche** ON-Basis von ℓ^2 .

Satz 5.3.5. *Jeder separable Prähilbertraum besitzt eine abzählbare ON-Basis.*

Beweis. Wähle $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ total, linear unabhängig und orthonormalisiere. □

Wir stellen nun Eigenschaften von ON-Basen zusammen.

Satz 5.3.6 (Fourier-Entwicklung)**.** *Sei* $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ *eine ON-Basis von* E *. Dann gilt für* $x, y \in E$ *:*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x|e_n)e_n \quad (\textit{Fourierreihe von } x) \tag{5.16}$$

$$(x|y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x|e_n)(e_n|y) \tag{5.17}$$

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x|e_n)|^2 \quad (\textit{Parsevalsche Gleichung}) \tag{5.18}$$

Dabei bedeutet (5.16), dass $\lim\limits_{k\to\infty} \|x - \sum\limits_{n=1}^{k} (x|e_n)e_n\| = 0$.

Beweis. Sei $P_n = \sum\limits_{j=1}^{n} e_k \otimes e_k$ die orthogonale Projektion auf

$$E_n := \ \text{lin}\ \{e_1, \dots e_n\}.$$

Sei $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Dann ist $\overline{F} = E$. Ist $x \in E_{n_0}$, so ist $P_n x = x$ für alle $n \geq n_0$. Damit ist $\lim_{n\to\infty} P_n x = x$ für alle $x \in F$ und somit auch für alle $x \in E$ (nach Korollar 2.3.4). Wir haben (5.16) bewiesen. Für $x, y \in E$ ist

$$\begin{aligned}(x|y) = \lim_{n\to\infty} (P_n x \mid P_n y) \\ &= \lim_{n\to\infty} (\sum_{j=1}^{n} (x|e_j)e_j \mid \sum_{k=1}^{n} (y|e_k)e_k) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} (x|e_j)\overline{(y|e_j)} = \sum_{j=1}^{\infty} (x|e_j)(e_j|y) ,\end{aligned}$$

d.h. (5.17). Setzt man $x = y$ in (5.17), so erhält man (5.18). □

Sei $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine ON-Basis von E . Ist $x \in E$, so nennt man $(x|e_n)$ den $n-$ ten **Fourier-Koeffizienten** von x . Aus (5.18) folgt, dass $((x|e_n))_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$. Umgekehrt, falls eine Reihe

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \tag{5.19}$$

mit $\alpha_n \in \mathbb{K}$ in E konvergiert (d.h. $\lim_{n\to\infty} \|x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\| = 0)$, so ist α_m der $m-$ te Fourier-Koeffzient von x (denn $(x|e_m) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (e_k|e_m) = \alpha_m)$. Damit ist die Darstellung eines Vektors $x \in E$ durch seine Fourierreihe (5.16) eindeutig. Ferner impliziert die Konvergenz der Reihe (**??**), dass die Koeffizientenfolge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in ℓ^2 ist. Falls E vollständig ist, gilt auch die Umkehrung:

Lemma 5.3.7. *Sei* $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ *eine ON-Basis eines Hilbertraumes* H *. Sei* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ *. Dann konvergiert die Reihe* (5.16).

Beweis. Seien $n, p \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\|\sum_{k=1}^{n+p} \alpha_k e_k - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\|^2 &= \|\sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k e_k\|^2 \\ = \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k e_k \mid \sum_{j=n+1}^{n+p} \alpha_j e_j\right) &= \sum_{k=n+1}^{n+p} |\alpha_k|^2 .\end{aligned}$$

Somit ist $(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. □

Wir wollen diese Überlegungen als Theorem zusammenfassen. Dazu geben wir folgende Definition:

Definition 5.3.8. *Seien E und $\hat{E}$ zwei Prähilberträume. Eine lineare Abbildung $U : E \to \hat{E}$ heißt unitär, falls U bijektiv ist und*

$$(Ux \mid Uy) = (x \mid y) \quad (x, y \in E) . \tag{5.20}$$

Wählt man $x = y$ in (5.20)*, so erhält man*

$$\|Ux\|^2 = \|x\|^2 \quad (x \in E) .$$

Somit sind unitäre Operatoren isometrisch und damit stetig. Insbesondere ist E vollständig genau dann, wenn $\hat{E}$ vollständig ist.

Wir nennen zwei Prähilberträume **isomorph**, wenn zwischen ihnen ein unitärer Operator existiert. Aus der Polarisationsidentität (Aufgabe 5.2.10) sieht man, dass jede bijektive, isometrische Abbildung U schon unitär ist (Aufgabe 5.3.13). Ferner sieht man leicht, dass unitäre Abbildungen eine ON-Basis in eine ON-Basis überführt. Im folgenden Theorem führen wir die ON-Basis eines separablen Hilbertraumes in die kanonische ON-Basis von ℓ^2 über.

Theorem 5.3.9. *Sei H ein separabler Hilbertraum. Sei $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine ON-Basis. Dann definiert $x \in H \mapsto ((x|e_n))_{n\in\mathbb{N}}$ einen unitären Operator U von H nach ℓ^2 .*

Beweis. Das folgt unmittelbar aus Satz 5.3.6 □

Jeder separable Hilbertraum H ist somit isomorph zu ℓ^2 . In den Anwendungen treten Hilberträume jedoch in ganz verschiedener Gestalt auf, wie wir in Kapitel 7 sehen werden.

Man kann die vorangehenden Überlegungen auch dazu benutzen, die Vervollständigung eines Prähilbertraumes zu definieren.

Bemerkung 5.3.10 (Vervollständigung)**.** Sei E ein separabler Hilbertraum. Wähle eine ON-Basis $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ in E . Die Abbildung $j : E \to \ell^2$, $x \mapsto ((x|e_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist linear und erhält wegen der Parseval'schen Gleichung (5.18) das Skalarprodukt. Insbesondere ist sie isometrisch. Identifizieren wir E mit $j(E)$ so können wir E als einen dichten Teilraum eines Hilbertraumes betrachten.

Schließlich bemerken wir, dass im Hilbertraum die Totalitätsbedingung (5.15) leicht nachzuweisen ist. Aus Korollar 5.2.5 folgt unmittelbar folgendes nützliche Kriterium:

Lemma 5.3.11 (Vollständigkeit eines ON-Systems)**.** *Ein Orthonormalsystem* $\{e_i : i \in I\}$ *in einem Hilbertraum* H *ist genau dann eine ON-Basis, wenn für alle* $x \in H$

$$(x|e_i) = 0 \quad \textit{für alle} \quad i \in I \Rightarrow x = 0 \, .$$

Wir beenden diesen Abschnitt mit einer Bemerkung über Umordnung von Fourierreihen. Sei $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine ON-Basis eines separablen Prähilbertraumes. Sei $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv. Dann ist auch $\{e_{\pi(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ eine ON-Basis. Folglich konvergiert auch die Reihe

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x|e_{\pi(n)})e_{\pi(n)} \tag{5.21}$$

für alle $x \in E$. Mit anderen Worten, die Fourierreihe (5.16) ist unbedingt konvergent.

Bemerkung 5.3.12. Anders als in endlich-dimensionalen Räumen impliziert die unbedingte Konvergenz noch nicht absolute Konvergenz. Das kann man z. B. folgendermaßen sehen:
Sei E vollständig. Wähle $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2 \setminus \ell^1$. Dann konvergiert Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{\pi(n)} e_{\pi(n)}$$

für jedes bijektive $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (d.h. die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ **konvergiert unbedingt**), dennoch ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|\alpha_n e_n\| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| = \infty$.

Häufig ist es günstig, über $\mathbb{Z}$ zu indizieren. Ist $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ eine ON-Basis von E , so gilt

$$x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x|e_n)e_n := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{+n} (x|e_k)e_k \tag{5.22}$$

für jedes $x \in E$. Man könnte aber auch eine andere Abzählung von $\mathbb{Z}$ wählen.

Aufgabe 5.3.13 (Unitäre Operatoren)**.** *Seien* $E, \hat{E}$ *zwei Prähilberträume und* $U : E \to \hat{E}$ *linear und bijektiv.*

a) Zeige, dass U *genau dann unitär ist, wenn* U *isometrisch ist.*
Anleitung: *Benutze die Polarisations-Identität (5.1.10) bzw. (5.1.11).*

b) Sei E *separabel und* $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ *eine ON-Basis von* E *. Zeige, dass* U *genau dann unitär ist, wenn* $\{Ue_n : n \in \mathbb{N}\}$ *eine ON-Basis von* $\hat{E}$ *ist.*

Aufgabe 5.3.14 (gewichteter $\boldsymbol{\ell^2}$– Raum)**.** *Sei* $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $(0,\infty)$ *und* $\ell^2_w = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K} : \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 w_n < \infty\}$ *. Zeige, dass* ℓ^2_w *ein Hilbertraum bzgl. dem Skalarprodukt*

$$(x|y)_w = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n} w_n$$

ist.

Anleitung: Zeige, dass ℓ^2_w unitär isomorph zu ℓ^2 ist.

5.4 Selbstadjungierte kompakte Operatoren

In diesem Abschnitt beweisen wir den wichtigen Spektralsatz für selbstadjungierte kompakte Operatoren.Er besagt, dass solche Operatoren durch geeignete Wahl einer ON -Basis diagonalisiert werden können, also von sehr einfacher Form sind.
Sei H ein Hilbertraum über $\mathbb{K}$.

Satz 5.4.1. *Sei* $T \in \mathcal{L}(H)$ *. Dann gibt es genau einen Operator* $T^* \in \mathcal{L}(H)$ *derart, dass*

$$(Tx \mid y) = (x \mid T^*y) \quad (x, y \in H)\ .$$

Ferner gilt $\|T^*\| = \|T\|$ *. Der Operator* T^* *heißt die* **Adjungierte** *von* T *. Man nennt* T **selbstadjungiert**, *falls* $T = T^*$ *.*

Beweis. Sei $y \in H$. Dann definiert $\varphi(x) = (Tx \mid y)$ eine stetige Linearform auf H . Nach dem Satz von Riesz-Fréchet gibt es genau ein $T^*y \in H$, so dass $\varphi(x) = (x \mid T^*y)$. Aus der Eindeutigkeit folgt die Linearität von T . Ferner ist $\sup\limits_{\|y\|\le 1} \|T^*y\| = \sup\limits_{\|y\|\le 1} |(x \mid T^*y)| = \sup\limits_{\|x\|\le 1} \sup\limits_{\|y\|\le 1} |(Tx \mid y) = \sup\limits_{\|x\|\le 1} \|Tx\| = \|T\|$. Damit ist T stetig und $\|T^*\| = \|T\|$. □

Beispiel 5.4.2 (Matrixdarstellung)**.** *Sei* $H = \ell^2$, $T \in \mathcal{L}(H)$ *. Sei* $a_{nm} = (Te_m \mid e_n) = (Te_m)_n$ *, so dass*

$$(Tx)_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} x_m \quad (x \in \ell^2) . \tag{5.23}$$

(vgl. Aufgabe 3.2.13). Setze $a^*_{nm} = \overline{a_{mn}}$ *. Dann ist*

$$(T^*x)_n = \sum_{m=1}^{\infty} a^*_{nm} x_m \quad (x \in \ell^2) . \tag{5.24}$$

Insbesondere ist T genau dann selbstadjungiert, wenn $a_{nm} = \overline{a_{mn}}$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$.

Lemma 5.4.3. *Sei* $T \in \mathcal{L}(H)$ *. Dann ist* T^*T *selbstadjungiert und* $\|T^*T\| = \|T\|^2$ *.*

Beweis. Es ist $(T^*Tx \mid y) = (Tx \mid Ty) = (x \mid T^*Ty)$. Damit ist T^*T selbstadjungiert und

$$\begin{aligned}
\|T^*T\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|T^*Tx\| &= \sup_{\|x\|\le 1} \sup_{\|y\|\le 1} |(T^*Tx \mid y)| \\
&= \sup_{\|x\|\le 1} \sup_{\|y\|\le 1} |(Tx \mid Ty)| \ge \sup_{\|x\|\le 1} |(Tx \mid Tx)| \\
&= \sup_{\|x\|\le 1} \|Tx\|^2 = \|T\|^2 .
\end{aligned}$$

Auf der anderen Seite ist $\|T^*T\| \le \|T^*\|\|T\| = \|T\|^2$. □

Wir werden später sehen, dass selbstadjungierte Operatoren reelles Spektrum haben. Hier betrachten wir nur das Punktspektrum.

Satz 5.4.4. *Sei* $T \in \mathcal{L}(H)$ *selbstadjungiert. Dann gilt:*

(a) $\sigma_p(T) \subset \mathbb{R}$ *;*

(b) $Tx = \lambda x$, $Ty = \mu y$, $\lambda \ne \mu \Rightarrow x \perp y$ *.*

(c) $\|T^2\| = \|T\|^2$ *.*

(d) $r(T) = \|T\|$ *.*

Beweis. (a) Sei $\lambda \in \sigma_p(T)$. Sei $x \in H \setminus \{0\}$, so dass $Tx = \lambda x$. Dann ist $\lambda(x \mid x) = (\lambda x \mid x) = (Tx \mid x) = (x \mid Tx) = (x \mid \lambda x) = \bar{\lambda}(x \mid x)$. Damit ist $\lambda = \bar{\lambda}$.
(b) Es gilt $\lambda(x \mid y) = \lambda(x \mid y) = (Tx \mid y) = (x \mid Ty) = (x \mid \mu y) = \mu(x \mid y)$.
(c) folgt aus Lemma 5.4.3.
(d) Aus (c) folgt, dass $\|T^{2n}\| = \|T\|^{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Damit gilt nach Satz 4.1.4 $r(T) = \lim\limits_{n\to\infty} \|T^{2n}\|^{\frac{1}{2n}} = \|T\|$. □

Ist $T \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert und $\mu \in \sigma_p(T)$ so heißt $\ker(\mu - T)$ der **Eigenraum** von T zum Eigenwert μ . Aussage (b) des obigen Satzes besagt, dass Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal zueinander sind, d.h.

$$\ker(\mu - T) \subset (\ker(\lambda - T))^{\perp} \tag{5.25}$$

wenn $\lambda, \mu \in \sigma_p(T)$, $\lambda \ne \mu$.

Nun können wir den Spektralsatz für selbstadjungierte kompakte Operatoren beweisen.

Theorem 5.4.5 (Spektralsatz)**.** *Sei* H *ein separabler und unendlich-dimensionaler Hilbertraum und sei* $T \in \mathcal{L}(H)$ *. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) T *ist kompakt und selbstadjungiert.*

(ii) Es gibt eine ON-Basis $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ *von* H *und eine reelle Nullfolge* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *, so dass*

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x \mid e_n) e_n \quad (x \in H) . \tag{5.26}$$

Beweis. $(ii) \Rightarrow (i)$. Sei $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine ON-Basis von H und sei $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Nullfolge. Sei $x \in H$. Dann ist $((x \mid e_n))_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, also ist auch $(\lambda_n(x \mid e_n))_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$. Damit konvergiert die Reihe (4.4) nach Lemma 5.3.7. Die Parsevalsche Gleichung zeigt, dass $\|Tx\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda_n(x \mid e_n)|^2 \leq (\sup\limits_{m\in\mathbb{N}} |\lambda_m|^2) \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} |(x \mid e_n)|^2 = (\sup\limits_{m\in\mathbb{N}} |\lambda_m|^2) \|x\|^2$.

Damit ist $T \in \mathcal{L}(H)$ und

$$\|T\| \leq \|\lambda\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| . \tag{5.27}$$

Sei $T_m x = \sum\limits_{n=1}^{m} \lambda_n (x \mid e_n) e_n$. Dann ist $T_m \in \mathcal{L}(H)$ ein Operator von endlichem Rang und somit ist T_m kompakt. Aus (4.5) folgt, dass $\|T - T_m\| \leq \sup\limits_{n>m} |\lambda_n|$. Somit ist $T = \lim\limits_{m\to\infty} T_m$ kompakt nach Satz 4.2.2. Schließlich ist nach (3.4), $(Tx \mid y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x \mid e_n)(e_n \mid y)$ und somit

$$\begin{aligned} (x \mid Ty) &= (x \mid \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (y \mid e_n) e_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \overline{(y \mid e_n)} (x \mid e_n) = (Tx \mid y) . \end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, dass (5.26) einen kompakten selbstadjungierten Operator definiert.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Sei T selbstadjungiert und kompakt. Nach Satz 5.4.4 ist $\sigma_p(T) \subset \mathbb{R}$. Sei $\sigma(T) \setminus \{0\} = \{\mu_n : n \in I\}$, wobei $\mu_k \neq \mu_\ell$, wenn $\ell \neq k$. Dann

ist $\mu_n \in \sigma_p(T)$ (nach Theorem 4.3.3) und alle Eigenräume $\ker(\mu_n - T)$ sind endlich-dimensional nach Satz 2.2.3 Sei $\{f_{n,i} : i = 1, \ldots k_n\}$ eine ON-Basis von $\ker(\mu_n - T)$. Sei $F = \overline{\text{lin}}\{f_{n,i} : n \in \mathbb{N}, i = 1, \ldots k_n\}$. Dann ist $TF \subset F$ und auch $TF^\perp \subset F^\perp$ (denn sei $x \in F^\perp$, dann ist $(Tx \mid f_{n,i}) = (x \mid Tf_{n,i}) = (x \mid \mu_n f_{n,i}) = \mu_n(x \mid f_{n,i}) = 0)$. Damit ist $T_{|F^\perp}$ kompakt und selbstadjungiert und $\sigma_p(T_{|F^\perp}) \subset \{0\}$. Somit ist $r(T_{|F^\perp}) = 0$ und aus Satz 5.4.4 folgt, dass $T_{|F^\perp} = 0$.
Sei $\{f_{0,i} : i \in I_0\}$ eine ON-Basis von $F^\perp$. Dann ist $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} = \bigcup\limits_{n \in I} \{f_{n,i} : i = | \ldots k_n\} \cup \{f_{0,i} : i \in I_0\}$ eine ON-Basis von H . Die Orthogonalität folgt aus (4.3). Um die Totalität zu zeigen, benutzen wir Lemma 5.3.11. Wähle $x \in H$, so dass $x \perp e_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $x \in F \cap F^\perp = \{0\}$.

Nach Konstruktion gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $\lambda_n \in \mathbb{R}$, so dass $Te_n = \lambda_n e_n$. Aus Lemma 5.3.4 folgt, dass $\lim \lambda_n = 0$. □

Bemerkung 5.4.6. Der obige $\dim H < \infty$, so zeigt der obige Beweis, dass jeder selbstadjungierte Operator $T \in \mathcal{L}(H)$ von der Form ist

$$Tx = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n (x \mid e_n) e_n \tag{5.28}$$

wobei $\{e_1, \ldots e_N\}$ eine ON-Basis von H und $\lambda_n \in \mathbb{R}$ $(n = 1 \ldots N)$.

Aus (4.4) folgt insbesondere, dass $Te_n = \lambda_n e_n$. Der Spektralsatz kann also in Worten so formuliert werden: Sei T ein selbstadjungierter, kompakter Operator auf einem separablen Hilbertraum H . Dann besitzt H eine ON-Basis aus Eigenvektoren von T .

Es ist bemerkenswert, dass dieser Satz auch für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gültig ist. Ist etwa $H = \ell^2$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so existiert die ON-Basis in dem reellen Hilbertraum ℓ^2 .

Man kann den Spektralsatz auch anders formulieren: Jeder kompakte selbstadjungierte Operator ist unitär äquivalent zu einer Diagonalmatrix mit einer reellen Nullfolge in der Diagonalen. Genauer gilt folgendes:

Korollar 5.4.7 (Diagonalisation). *Sei H ein separabler ∞-dimensionaler Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(H)$. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *T ist selbstadjungiert und kompakt;*

(ii) *es gibt einen unitären Operator $U : H \to \ell^2$ und eine reelle Nullfolge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass der Operator $\hat{T} = UTU^{-1}$ von der Form ist*

$$\hat{T}x = (\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad (x \in \ell^2) \ .$$

Aufgabe 5.4.8. *Sei H ein Hilbertraum und $T : H \to H$ linear, derart dass $(Tx \mid x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in H$.*

a) *Zeige, dass $(Tx \mid y) = (x \mid Ty)$ für alle $x, y \in H$.*
Anleitung: *Benutze die Polarisationsidentität.*

b) *Zeige, dass T stetig ist.*
Anleitung: *Benutze den Satz vom abgeschlossenen Graphen.*

Kapitel 6

Konvexe Analysis

Besonders interessante Resultate erhält man, wenn analytische und geometrische Eigenschaften in Verbindung gebracht werden. Im ersten Abschnitt dieses Kapitels leiten wir Trennungssätze für konvexe Mengen aus dem analytischen Satz von Hahn-Banach her. Ziel der Untersuchungen sind aber topologische Eigenschaften, insbesondere Folgenkompaktheit. Es ist interessant, dass eine geometrische Eigenschaft der Norm (nämlich gleichmäßige Konvexität) eine topologische (nämlich Reflexivität) impliziert. Dies zeigen wir im 2. Abschnitt. Im 3. Abschnitt werden Minima von konvexen Funktionen betrachtet. Hier ist die schwache Konvergenz im Zusammenhang mit den geometrischen Eigenschaften von Bedeutung.

6.1 Der Trennungssatz von Hahn-Banach

In diesem Abschnitt beweisen wir geometrische Trennungssätze für konvexe Mengen. Sie leiten sich sehr einfach aus dem Fortsetzungssatz von Hahn-Banach her. Das liegt daran, dass ein enger Zusammenhang zwischen konvexen Mengen und sublinearen Funktionalen besteht.

Im folgenden sei E ein normierter Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Teilmenge C von E heißt **konvex**, wenn zu zwei Punkten $x, y \in C$ auch das Segment $S = \{\lambda x + (1-\lambda)y : \lambda \in [0,1]\}$ in C liegt. Sei $C \subset E$ konvex und offen. Es sei weiterhin $0 \in C$. Die durch

$$p(x) = \inf\{\alpha > 0 \ : \ x \in \alpha\, C\} \tag{6.1}$$

definierte Funktion $p : E \to \mathbb{R}_+$ heißt die **Eichfunktion** von C .

Lemma 6.1.1. *Sei $C \subset E$ offen, konvex; es sei $0 \in C$. Die Eichfunktion p von C hat folgende Eigenschaften:*

(a) es gibt $M \geq 0$, so dass $p(x) \leq M\|x\| \quad (x \in E)$;

(b) p ist sublinear;

(c) es gilt $C = \{x \in E : p(x) < 1\}$.

Beweis. 1. Es gibt $r > 0$, so dass $B(0,r) \subset C$. Sei $x \in E$, $x \neq 0$. Dann ist $r \cdot \frac{x}{\|x\|} \in B(0,r) \subset C$. Also ist $x \in \frac{\|x\|}{r} C$ und somit $p(x) \leq \frac{1}{r}\|x\|$. Wir haben *(a)* bewiesen.
2. Da $0 \in C$, gilt $p(0) = 0$. Ferner ist für $\lambda > 0$, $x \in E$, $p(\lambda x) = \inf\{\alpha > 0 : \lambda x \in \alpha\, C\} = \inf\{\alpha > 0 : x \in \frac{\alpha}{\lambda}\, C\} = \lambda \cdot \inf\{\beta > 0 : x \in \beta\, C\} = \lambda p(x)$.
3. Seien $x, y \in E$, $\varepsilon > 0$. Es existieren $u_1, u_2 \in C$, $0 < \alpha_1 < p(x) + \frac{\varepsilon}{2}$, $0 < \alpha_2 < p(x) + \frac{\varepsilon}{2}$, so dass $x = \alpha_1 u_1$, $y = \alpha_2 u_2$. Damit ist $x + y = (\alpha_1 + \alpha_2)\{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2} u_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2} u_2\} = (\alpha_1 + \alpha_2)\{\lambda u_1 + (\lambda - \lambda)u_2\} \in (\alpha_1 + \alpha_2)C$ wobei $\lambda = \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}$. Folglich ist $p(x + y) \leq (\alpha_1 + \alpha_2) \leq p(x) + p(y) + \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $p(x+y) \leq p(x)+p(y)$. Zusammen mit 2. ist damit die Sublinearität von p bewiesen.
4. Sei $x \in C$. Da C offen ist, gibt es $\varepsilon > 0$, so dass $(1+\varepsilon)x \in C$. Damit ist $p(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$. Sei umgekehrt $p(x) < 1$. Dann gibt es $0 < \alpha < 1$ und $u \in C$, so dass $x = \alpha u = \alpha u + (1-\alpha)0$. Da $0 \in C$ und da C konvex ist, folgt, dass $x \in C$. Damit ist *(c)* bewiesen. $\square$

Nun können wir den ersten Trennungssatz beweisen.

Satz 6.1.2 (erster Trennungssatz)**.** *Sei E ein normierter Vektorraum und seien A, B nicht-leere konvexe, disjunkte Teilmengen von E . Ist A offen, so gibt es $\varphi \in E'$ und $\gamma \in \mathbb{R}$, so dass*

$$\operatorname{Re}\varphi(x) < \gamma \leq \operatorname{Re}\varphi(y) \tag{6.2}$$

für alle $x \in A$, $y \in B$.

Bemerkung 6.1.3. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Sei $A \subset E$ konvex und offen und $\varphi \in E'$, $\varphi \neq 0$. Dann ist $\varphi(A)$ ein offenes Intervall. Da $J = \varphi(A)$ eine konvexe Menge ist, ist J ein Intervall. Wir zeigen, dass J offen ist. Andernfalls gehört einer der Endpunkte von J zu J ; sagen wir, der rechte. Es gibt also $a \in A$, so dass $\varphi(x) \leq \varphi(a)$ für alle $x \in A$. Wähle $b \in A$, so dass $\varphi(b) \neq 0$. Dann gibt es $\varepsilon > 0$, so dass $a + \lambda b \in A$ falls $|\lambda| < \varepsilon$. Damit ist $\varphi(a) + \lambda\varphi(b) \leq \varphi(a)$, also $\lambda\varphi(b) \leq 0$, wenn $|\lambda| < \varepsilon$. Das ist absurd. Natürlich hätten wir auch den Satz der offenen Abbildung benutzen können, um diese einfache Aussage zu beweisen.

Beweis von Satz 6.1.2. Wir können annehmen, dass $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, da ja jede reelle stetige Linearform eine eindeutige komplexe lineare Fortsetzung besitzt (siehe Lemma 3.1.3).

1. Fall: Wir nehmen an, dass B einpunktig ist: $B := \{y_0\}$. OBdA nehmen wir an, dass $0 \in A$ (sonst ersetzen wir A durch $A - a$ und y_0 durch $y_0 - a$ mit $a \in A)$. Sei p die Eichfunktion von A . Sei $F = \mathbb{R} \cdot y_0$, $\varphi_0(\lambda y_0) = \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R})$. Dann wird φ_0 durch p dominiert. Sei nämlich $\lambda \in \mathbb{R}$. Ist $\lambda \leq 0$, so ist $\varphi_0(\lambda y_0) \leq 0 \leq p(\lambda y_0)$. Ist $\lambda > 0$, so ist $\varphi_0(\lambda y_0) = \lambda \leq \lambda p(y_0) = p(\lambda y_0)$, da nach Lemma 6.1.1.*(c)* $p(y_0) \geq 1$. Nach dem Fortsetzungssatz von Hahn-Banach 3.1.2 gibt es $\varphi : E \to \mathbb{R}$ linear, so dass $\varphi(x) \leq p(x)$ für alle $x \in E$ und $\varphi(y_0) = \varphi_0(y_0) = 1$. Nach Lemma 6.1.1. *(c)* ist also für alle $x \in A$, $\varphi(x) \leq p(x) < 1 = \varphi(y_0)$. Es gilt also (6.2) mit $\gamma = 1$. Da $\pm\varphi(x) = \varphi(\pm x) \leq p(\pm x) \leq M\|x\|$, ist $|\varphi(x)| \leq M\|x\| \quad (x \in E)$, und somit ist φ stetig. Der Satz ist in diesem Fall bewiesen.

2. Fall: B ist beliebig. Betrachte die Menge $C = A - B$. Da $A \cap B = \phi$, ist $0 \notin C$. Die Menge C ist offensichtlich konvex, und da $C = \bigcup_{b \in B} (A - b)$ ist sie offen als Vereinigung offener Mengen. Wir können also den schon bewiesenen Fall anwenden und finden $\varphi \in E'$, so dass $\varphi(x) - \varphi(y) = \varphi(x - y) < \varphi(0) = 0$ für alle $x \in A$, $y \in B$. Somit ist $\varphi(x) < \varphi(y)$ für alle $x \in A$, $y \in B$. Da $\varphi(A)$ ein offenes Intervall ist, folgt die Behauptung. $\square$

Der Trennungssatz läßt sich geometrisch folgendermaßen interpretieren. Sei

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Sei $\varphi \in E'$, $\varphi \neq 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$. Dann heißt die Menge

$$H = \{x \in E : \varphi(x) = \gamma\} \tag{6.3}$$

eine **Hyperebene** in E . Der Raum $F = \ker \varphi$ ist ein abgeschlossener Teilraum von E von Kodimension 1 (d.h. $\dim E/F = 1$) . Wähle $x_1 \in E$, so dass $\varphi(x_1) = \gamma$. Dann ist

$$H = F + x_1 \ .$$

Hyperebenen sind also nichts anderes als verschobene abgeschlossene Teilräume von Kodimension 1 . Ist $E = \mathbb{R}^2$, so sind also Hyperebenen nichts anderes als Geraden; die Hyperebenen im $\mathbb{R}^3$ sind dasselbe wie Ebenen.

Sei nun H die durch (6.3) gegebene Hyperebene. Betrachte die Halbebenen

$$H_- = \{x \in E : \operatorname{Re} \varphi(x) < \gamma\}$$

und

$$H_+ = \{x \in E : \operatorname{Re} \varphi(x) > \gamma\} \ .$$

Damit wird E in drei disjunkte konvexe Mengen H_-, H und H_+ zerlegt. Ist etwa $E = \mathbb{R}^3$, so besteht H_- gerade aus all denjenigen Punkten, die auf einer Seite der Ebene H liegen und H_+ aus denjenigen, die auf der anderen Seite liegen. Die Aussage (6.2) bedeutet also, dass $A \subset H_-$ und $B \subset \overline{H_+} = H \cup H_+$. Man kann also A und B durch eine Hyperebene trennen. Es handelt sich um Trennung im weiteren Sinne, da wir das Gleichheitszeichen in (6.2) zulassen. Strikte Trennung wird im folgenden zweiten Trennungssatz erzielt:

Satz 6.1.4 (zweiter Trennungssatz)**.** *Sei E ein normierter Vektorraum und seien A und B zwei nicht-leere disjunkte konvexe Mengen in E . Ist A kompakt und B abgeschlossen, so gibt es $\varphi \in E'$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$,so dass*

$$\operatorname{Re} \varphi(x) < \gamma_1 < \gamma_2 < \operatorname{Re} \varphi(y) \tag{6.4}$$

für alle $x \in A$, $y \in B$.

Beweis. Wir können wieder annehmen, dass $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Da B kompakt und A abgeschlossen ist, ist der Abstand $r := d(A,B) = \inf\{d(x,y) : x \in A\ ,\ y \in B\} > 0$ (siehe Korollar 1.5.9). Die Menge $\tilde{A} = A + B(0,r) = \bigcup\limits_{a \in A} (a + B(0,r))$ ist offen und konvex. Ferner ist $\tilde{A} \cap B = \emptyset$. Nach dem ersten Trennungssatz gibt es also $\varphi \in E'$, so dass $\varphi(\tilde{A}) \cap \varphi(B) = \emptyset$. Da $\varphi(\tilde{A})$ ein offenes und $\varphi(A)$ ein kompaktes Intervall ist, folgt die Behauptung. $\square$

Eine wichtige analytische Folgerung der Trennungssätze ist, dass norm-abgeschlossene konvexe Mengen schwach abgeschlossen sind.

Satz 6.1.5 (schwacher Abschluß konvexer Mengen)**.** *Sei E ein normierter Vektorraum und $C \subset E$ eine abgeschlossene, konvexe Menge. Sei $x \in E$, $x_n \in C$, $x_n \rightharpoonup x \quad (n \to \infty)$. Dann gilt $x \in C$.*

Beweis. Angenommen, $x \notin C$. Nach dem zweiten Trennungssatz (angewandt auf $A = C$, $B = \{x\}$) gibt es $\varphi \in E'$, $\gamma \in \mathbb{R}$, so dass $\operatorname{Re}\varphi(y) < \gamma < \operatorname{Re}\varphi(x)$ für alle $y \in C$. Wählen wir insbesondere $y = x_n$, erhalten wir aus dieser Ungleichung mit $n \to \infty$, $\operatorname{Re}\varphi(x) \le \gamma < \operatorname{Re}\varphi(x)$, was absurd ist. $\square$

Bemerkung 6.1.6. Im obigen Satz ist die Konvexität eine entscheidende Voraussetzung. Man betrachte etwa $E = \ell^p \quad (1 \le p < \infty)$ und die abgeschlossene (nicht konvexe) Sphäre $S = \{x \in E : \|x\| = 1\}$. Sei $e_n = (0, \ldots, 1, 0, \ldots)$ der $n-$ te Einheitsvektor. Es gilt $e_n \in S$, $e_n \rightharpoonup 0$, aber natürlich $0 \notin S$.

Ist $A \subset E$, so bezeichnen wir mit

$$co(A) = \bigcap_{\substack{A \subset C \\ C \text{ konvex}}} C$$

die konvexe Hülle von A . Es ist die kleinste konvexe Menge, die A umfaßt. Man sieht leicht, dass $co(A)$ aus allen Konvex-Kombinationen von Elemen-

ten aus A besteht, d.h.
(6.5)

$$co(A) = \{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j : n \in \mathbb{N} \ , \ \lambda_j \geq 0 \ , \ x_j \in A \ , \ j = 1 \ldots n \ , \ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1\} \ .$$

Der Abschluß $\overline{co}(A)$ von $co(A)$ ist die kleinste abgeschlossene, konvexe Menge, die A umfaßt. Wir nennen $\overline{co}(A)$ die abgeschlossene konvexe Hülle von A .

Korollar 6.1.7. *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in E , die schwach gegen $x \in E$ konvergiert. Dann gibt es $y_n \in co\{x_m : m \in \mathbb{N}\}$, so dass*

$$\lim_{n\to\infty} y_n = x$$

bzgl. der Normtopologie.

Beweis. Sei $C = co\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Aus Satz 6.4.4 folgt, dass $x \in \overline{C}$, d.h. es gibt $y_n \in C$, so dass $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$. ■

Das obige Korollar ist von großem Nutzen für den Nachweis eines Minimums für konvexe Funktionen (siehe § 6.3).

Wir schließen diesen Abschnitt mit einer Anwendung, die später nützlich sein wird.

Satz 6.1.8 (Helly)**.** *Sei E ein normierter Vektorraum über $\mathbb{K}$ und seien*

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in E' \ , \ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K} \ .$$

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $x \in E$ mit $\|x\| \leq 1 + \varepsilon$, so dass $\varphi_i(x) = \alpha_i$ $(i = 1, \ldots, n)$;

(ii) es gilt $|\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i| \leq \|\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i \varphi_i\|$ für alle $\beta_1, \ldots \beta_n \in \mathbb{K}$.

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$. Sei $\beta_1, \dots \beta_n \in \mathbb{K}$. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle x der Aussage (i) entsprechend. Dann ist $|\sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_i| = |\sum_{i=1}^n \beta_i \varphi_i(x)| \leq \|\sum_{i=1}^n \beta_i \varphi_i\| \|x\| \leq \|\sum_{i=1}^n \beta_i \varphi_i\|(1+\varepsilon)$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, ist (ii) bewiesen.
$(i) \Rightarrow (ii)$. Wir können annehmen, dass $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ linear unabhängig sind. Dann ist die Abbildung $\phi : E \to (\mathbb{K}^n, \| \ \|_2) : x \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$ linear stetig und surjektiv. (Beachte, dass $\phi(E)$ ein Teilraum von $\mathbb{K}^n$ ist. Wäre $\phi(E) \neq \mathbb{K}^n$, so gäbe es eine Linearform $\beta = (\beta_1, \dots \beta_n) \in (\mathbb{K}^n 1)'$, so dass $\sum_{j=1}^n \beta_j \varphi_j(x) = <\beta, \phi(x)> \ = 0$ für alle $x \in E)$. Sei $\varepsilon > 0$ und sei $B = \{x \in E : \|x\| < 1+\varepsilon\}$. Nach dem Satz von der offenen Abbildung (Satz 2.5.7) ist $\phi(B)$ offen. Angenommen (i) gilt nicht, d.h., $\alpha := (\alpha_1, \dots \alpha_n) \notin \phi(B)$. Dann gibt es nach dem Trennungssatz eine Linearform ψ auf $\mathbb{K}^n$, so dass

$$\operatorname{Re} \psi(\phi(x)) \leq \operatorname{Re} \psi(\alpha) \leq |\varphi(\alpha)|$$

für alle $x \in B$. Da wir x durch $e^{i\theta}x$ ersetzen können, folgt

$$|\psi(\phi(x))| \leq |\varphi(\alpha)|$$

für alle $x \in B$. Es gilt $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$, so dass $\psi(y) = \sum_{j=1}^n \beta_j y_j$ für alle $y = (y_1, \dots y_n) \in \mathbb{K}^n$. Damit ist

$$|\sum_{j=1}^n \beta_j \varphi_j(x)| \leq |\sum_{j=1}^n \beta_j \alpha_j|$$

für alle $x \in E$ mit $\|x\| < (1+\varepsilon)$. Damit ist $(1+\varepsilon)\|\sum_{j=1}^n \beta_j \varphi_j\| \leq |\sum_{j=1}^n \beta_j \alpha_j|$. Die Aussage (ii) ist also verletzt. □

Im reflexiven Fall ist der Beweis des Satzes von Helly viel einfacher. Außerdem kann man in Aussage (i) sogar $x \in E$ mit $\|x\| = 1$ (statt $\|x\| < 1 + \varepsilon$) finden (siehe Aufgabe 6.1.9).

Aufgabe 6.1.9. *Sei E ein normierter Vektorraum, $x_1, \dots, x_n \in E$, $\alpha_1, \dots \alpha_n \in \mathbb{K}$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:*

(i) Es gibt $\varphi \in E'$ *mit* $\|\varphi\| \leq 1$ *, so dass* $\phi(x_i) = \alpha_i \quad (i = 1, \ldots n)$ *;*

(ii) $|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i| \leq \| \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i\|$ *für alle* $\beta_1, \ldots \beta_n \in \mathbb{K}$ *.*

Dies ist eine direkte Anwendung fes Fortsetzungssatzes von Hahn-Banach.

6.2 Gleichmäßig konvexe Räume

In diesem Abschnitt betrachten wir eine geometrische Eigenschaft der Einheitskugel. Sei E ein normierter Raum. Mit

$$S_E := \{x \in E : \|x\| = 1\} \tag{6.6}$$

bezeichnen wir die **Einheitssphäre** von E . Das ist der Rand der Einheitskugel $B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$. Der Raum E heißt **strikt konvex**, wenn für zwei verschiedene Punkte $x, y \in S_E$, $x \neq y$, der Mittelpunkt $\frac{x+y}{2}$ im Inneren der Einheitskugel liegt; d.h. $\frac{\|x+y\|}{2} < 1$. Anders ausgedrückt: E ist genau dann strikt konvex, wenn für alle $x, y \in E$

$$\|x\| = \|y\| = \|\frac{x+y}{2}\| \Rightarrow x = y \ . \tag{6.7}$$

Der Raum E heißt gleichmäßig konvex, wenn die Eigenschaft in folgendem Sinne gleichmäßig gilt:

Definition 6.2.1. *Ein normierter Vektorraum* E *heißt* **gleichmäßig konvex**, *falls es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$ *gibt, so dass*

$$\|x\| = \|y\| = 1 \ , \ \|x - y\| \geq \varepsilon \Rightarrow \|\frac{x+y}{2}\| \leq 1 - \delta \ . \tag{6.8}$$

Insbesondere ist jeder gleichmäßig konvexe Raum strikt konvex.

Beispiel 6.2.2. a) Man sieht geometrisch sehr anschaulich,dass $(\mathbb{R}^2, \| \ \|_2)$ gleichmäßig konvex ist. Genauso sieht man aus der Gestalt der Einheitskugel, dass $(\mathbb{R}^2, \| \ \|_1)$ und $(\mathbb{R}^2, \| \ \|_\infty)$ nicht strikt konvex sind.
b) Allgemeiner ist jeder Prähilbertraum E gleichmäßig konvex. Das sieht

man unmittelbar aus dem Parallelogrammgesetz, das für $x, y \in S_E$ besagt, dass

$$\|\frac{x+y}{2}\|^2 + \|\frac{x-y}{2}\|^2 = 2 \ .$$

c) Der Raum $C[0,1]$ ist weder bzgl. der Suppremusnorm $\| \ \|_\infty$ noch bzgl. der sog. L^1- Norm $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$ strikt konvex. Das ist leicht zu sehen.

Es ist erstaunlich, dass aus der geometrischen Eigenschaft, nämlich der gleichmäßigen Konvexität, eine topologische Eigenschaft, die Reflexivität folgt. Das besagt, der folgende Satz:

Satz 6.2.3. *Jeder gleichmäßig konvexe Banachraum ist reflexiv.*

Für den Beweis benötigen wir etwas Vorbereitung. Zunächst einmal sieht man leicht, dass sich gleichmäßige Konvexität durch eine approximative Version von (6.7) ausdrücken läßt.

Lemma 6.2.4. *Ein normierter Vektorraum E ist genau dann gleichmäßig konvex, wenn für $x_n, y_n \in E$*

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|y_n\| = \lim_{n\to\infty} \|\frac{x_n+y_n}{2}\| \Rightarrow \\ \lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0 \ . \end{array} \right. \tag{6.9}$$

Beweis. Sei E gleichmäßig konvex. Seien $x_n, y_n \in E$, so dass $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|y_n\| = \lim_{n\to\infty} 1/2(x_n + y_n)\| =: \alpha$. Ist $\alpha = 0$, so ist die Aussage trivial. Ist $\alpha > 0$, so setzen wir $\tilde{x}_n = x_n/\|x_n\|$, $\tilde{y}_n = y_n/\|y_n\|$. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$ wie in Definition 6.2.1. Da $\lim_{n\to\infty} \|1/2(\tilde{x}_n + \tilde{y}_n)\| = 1$, gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\|1/2(\tilde{x}_n + \tilde{y}_n)\| > 1 - \delta$ für alle $n > n_0$. Damit ist $\|\tilde{x}_n - \tilde{y}_n\| \le \varepsilon$ für $n \ge n_0$ nach der Wahl von δ . Wir haben gezeigt, dass $\lim_{n\to\infty} \|\tilde{x}_n - \tilde{y}_n\| = 0$. Damit gilt auch $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$. Ist E nicht gleichmäßig konvex, so gibt es $\varepsilon > 0$ und $x_n, y_n \in E$ mit $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$, $\|\frac{x_n+y_n}{2}\| \ge 1 - \frac{1}{n}$, $\|x_n - y_n\| \ge \varepsilon$. Damit ist $\lim_{n\to\infty} \|\frac{x_n+y_n}{2}\| = 1$. Die Eigenschaft (6.9) ist also verletzt. $\square$

Lemma 6.2.5. *Sei* E *ein gleichmäßig konvexer Banachraum. Sei* $x_n \in E$ *, so dass*

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \lim_{n,m\to\infty} \|\frac{x_n + x_m}{2}\| \ .$$

Dann konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *.*

Beweis. Wir zeigen, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Andernfalls gibt es $\varepsilon > 0$ und

$$n_1 < m_1 < n_2 < m_2 < n_3 < m_3 \dots \ ,$$

so dass $\|x_{n_k} - x_{m_k}\| \geq \varepsilon \quad (k \in \mathbb{N})$. Aus der Voraussetzung folgt aber, dass $\lim\limits_{k\to\infty} \|\frac{x_{n_k}+x_{m_k}}{2}\| = \lim\limits_{k\to\infty} \|x_{n_k}\| = \lim\limits_{k\to\infty} \|x_{m_k}\|$. Das widerspricht Lemma 6.2.4. □

Beweis von Satz 6.2.3 . Sei $\phi \in E''$. Wir müssen $x_0 \in E$ finden, so dass $\phi(\varphi) = \varphi(x_0)$ für alle $\varphi \in E'$. Dazu können wir annehmen, dass $\|\phi\| = 1$. Wähle $\varphi_n \in E'$ mit $\|\varphi_n\| = 1$, so dass

$$\lim_{n\to\infty} |\phi(\varphi_n)| = \|\phi\| = 1 \ . \tag{6.10}$$

Wir zeigen, dass es $x_0 \in E$ gibt, so dass $\|x_0\| = 1$ und

$$\varphi_n(x_0) = \phi(\varphi_n) \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N} \ . \tag{6.11}$$

Nach dem Satz von Helly 6.1.6 gibt es nämlich $x_m \in E$ mit $\|x_m\| \leq 1 + \frac{1}{m}$, so dass

$$\varphi_n(x_m) = \phi(\varphi_n) \quad (n = 1, \dots, m) \ . \tag{6.12}$$

Sei $n \leq m$. Dann ist

$$\begin{aligned} \|x_n + x_m\| &\geq |\varphi_n(x_n) + \varphi_n(x_m)| \\ &= 2|\phi(\varphi_n)| \ . \end{aligned}$$

Mit (6.9) schließen wir daraus, dass

$$\lim_{n,m\to\infty} \|\frac{x_n + x_m}{2}\| \geq 1 \ .$$

Da $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|x_n\| \le 1$, folgt hieraus $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\| = \lim\limits_{n,m\to\infty}\|\frac{x_n+x_m}{2}\| = 1$. Aus Lemma 6.2.5 folgt nun, dass $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ existiert. Läßt man $m \to \infty$ in (2.7), so sieht man, dass x_0 die Identität (2.6) erfüllt.

Sei nun $\varphi_0 \in E'$ mit $\|\varphi_0\| = 1$. Ersetzen wir im obigen Argument die Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch die Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, so finden wir $\hat{x}_0 \in E$, so dass $\|\hat{x}_0\| = 1$ und $\varphi_n(\hat{x}_0) = \phi(\varphi_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist $\|\frac{x_0+\hat{x}_0}{2}\| \ge |\varphi_n(\frac{\hat{x}_0+x_0}{2})| = |\phi(\varphi_n)|$. Aus (6.12) folgt, dass $\|\frac{x_0+\hat{x}_0}{2}\| = 1$. Folglich ist $x_0 = \hat{x}_0$. Insbesondere gilt also $\varphi_0(x_0) = \phi(\varphi_0)$. Da $\varphi_0 \in E'$ ein beliebiges normiertes Funktional war, ist der Beweis vollständig. □

Wir schließen diesen Abschnitt mit einer nützlichen Eigenschaft:

Satz 6.2.6. *Sei E ein gleichmäßig konvexer Banachraum, $x_n \in E$, $x \in E$. Es gelte*

(a) $x_n \rightharpoonup x \quad (n \to \infty)$ *;*

(b) $\|x_n\| \to \|x\| \quad (n \to \infty)$ *.*

Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *.*

Beweis. O.B.d.A. $\|x\| = 1$. Sei $\varphi \in E'$ mit $\|\varphi\| = 1$, so dass $\varphi(x) = \|x\|$. Es ist $1 \ge \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|\frac{x_n+x}{2}\| \ge \lim\limits_{n\to\infty}|\varphi(\frac{x_n+x}{2})| = |\varphi(x)| = 1$. Also ist $\lim\limits_{n\to\infty}\|\frac{x_n+x}{2}\| = 1 = \|x\| = \lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|$. Damit folgt aus Lemma 6.2.4, dass $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$. ■

Aufgabe 6.2.7. *Sei E ein normierter Raum und $x, y \in S_E$, $x \ne y$. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) $\|\lambda x + (1-\lambda)y\| < 1$ *für alle* $\lambda \in (0,1)$ *;*

(ii) $\|\lambda x + (1-\lambda)y\| < 1$ *für ein* $\lambda \in (0,1)$ *.*

Aufgabe 6.2.8. *Ein endlich-dimensionaler normierter Vektorraum ist genau dann gleichmäßig konvex, wenn er strikt konvex ist. Hinweis: Benutze Lemma 6.2.4.*

6.3 Minimum konvexer Funktionen

Eine wichtige Aufgabe in der Analysis ist es nachzuweisen, ob eine reellwertige Funktion $f : C \to \mathbb{R}$ ein Minimum besitzt. Dazu benötigt man im Allgemeinen ein Teilfolgenargument (vgl. Korollar 1.4.9). Ist C eine beschränkte schwach abgeschlossene Teilmenge eines reflexiven Raumes E, so wäre die Sache einfach, wenn f schwach stetig ist. Letzte Voraussetzung ist aber viel zu stark für Anwendungen. Eine vernünftigere (viel schwächere) Voraussetzung ist die starke Stetigkeit von f. Ist nun f zusätzlich konvex (wie es in vielen Anwendungen der Fall ist), so fügen sich die topologischen (Reflexivität) und geometrischen Eigenschaften (Konvexität) wunderbar zusammen.

Definition 6.3.1. *Sei M ein metrischer Raum. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt* **nach unten halbstetig***, falls für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ die Menge $\{x : f(x) \leq \lambda\}$ abgeschlossen ist. Das ist gleichbedeutend mit folgendem: Sind $x \in M$, $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass $f(x) > \lambda$, dann gibt es eine Umgebung U von x, so dass $f(y) > \lambda$ für alle $y \in U$.*

Satz 6.3.2 (Minimum konvexer Funktionen)**.** *Sei E ein reflexiver Banachraum und $C \subset E$ abgeschlossen und konvex. Sei $f : C \to \mathbb{R}$ nach unten halbstetig und konvex, so dass*

$$\lim_{\substack{\|x\| \to \infty \\ x \in C}} f(x) = \infty \,. \tag{6.13}$$

Dann besitzt f ein Minimum.

Bedingung (6.13) bedeutet, dass es zu jedem $c \in \mathbb{R}$ ein $r > 0$ gibt, so dass $f(x) \geq c$, wenn $x \in C$, $\|x\| \geq r$. Sie ist automatisch erfüllt, wenn C beschränkt ist.

Beweis. Sei $d_0 := \inf_{x \in C} f(x) \in [-\infty, \infty)$. Wähle $d_1 > d_2 > \dots$ mit $\lim_{n\to\infty} d_n = d_0$. Sei $r > 0$, so dass $f(x) \geq d_1$ für alle $x \in C$ mit $\|x\| > r$. Die Menge $C_1 := \{x \in C : \|x\| \leq r\}$ ist konvex, beschränkt und $\inf_{x \in C_1} f(x) = d_0$. Sei $x_n \in C_1$ mit $f(x_n) \leq d_n$. Da E reflexiv ist, können wir annehmen, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach gegen ein $x_0 \in E$ konvergiert. Nach Satz 6.1.5

ist $x_0 \in C$. Ferner folgt aus Korollar 6.1.7, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $y_n \in co\{x_k : k \geq n\}$ gibt mit $\|y_n - x_0\| \leq \frac{1}{n}$. Da f konvex ist und $f(x_k) \leq d_n$ für alle $k \geq n$, gilt auch $f(y_n) \leq d_n \quad (n \in \mathbb{N})$. Also ist $f(y_n) \leq d_n \leq d_m$ für $n \geq m \geq 1$. Damit gilt auch $f(x_0) \leq d_m$. Also $f(x_0) = d_0 = \inf\limits_{m \in \mathbb{N}} d_m$. □

Von besonderem Interesse ist der Abstand einer konvexen Menge zu einem Punkt.

Korollar 6.3.3 (Proximum zu einer konvexen Menge)**.** *Sei E ein reflexiver Banachraum und C eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge von E . Sei $x_0 \in E$. Dann gibt es $y_0 \in C$, so dass*

$$\|x_0 - y_0\| = \min\{\|x_0 - y\| : y \in C\} . \tag{6.14}$$

Ist E strikt konvex, so ist $y_0 \in C$ eindeutig durch (6.14) bestimmt.

Beweis. Sei $f(y) = \|x_0 - y\| \quad (y \in C)$. Dann ist $f : C \to \mathbb{R}$ stetig, konvex und erfüllt (6.13). Damit gibt es nach Satz 6.3.2 $y_0 \in C$, so dass (6.14) gilt. Sei E strikt konvex. Sei $y_1 \in C$ ein weiterer Vektor, so dass $\|x_0 - y_1\| = \|x_0 - y_0\|$. Sei $u_0 = x_0 - y_0$, $u_1 = x_0 - y_1$. Dann ist $\|\frac{u_0+u_1}{2}\| = \|x_0 - (\frac{y_0+y_1}{2})\| \geq \|x_0 - y_0\| = \|u_0\| = \|u_1\|$, da $\frac{y_0+y_1}{2} \in C$. Auf der anderen Seite ist $\|\frac{u_0+u_1}{2}\| \leq \frac{1}{2}(\|u_0 + \|u_1\|) = \|u_0\|$. Aus der strikten Konvexität folgt also $u_0 = u_1$, d.h. $y_0 = y_1$. □

In Hilberträumen läßt sich das eindeutige Proximum geometrisch charakterisieren. Dazu beachte man folgendes.
Ist $E = \mathbb{R}^2$, so ist $(x \mid y) < 0$ genau dann, wenn der Winkel zwischen x und y größer als 90^o ist.

Satz 6.3.4. *Sei H ein Hilbertraum und $C \subset H$ abgeschlossen und konvex. Sei $x_0 \in H$, $y_0 \in C$. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) $\|x_0 - y_0\| = \min\limits_{y \in C} \|x_0 - y\|$

(ii) $\mathrm{Re}\,(x_0 - y_0 \,,\ y - y_0) \leq 0$ *für alle* $y \in C$.

Beweis. $(ii) \Rightarrow (i)$. Sei $y \in C$. Dann ist

$$\begin{aligned}\|x_0 - y\|^2 &= \|(x_0 - y_0) + (y_0 - y)\|^2 \\ &= \|x_0 - y_0\|^2 + 2\mathrm{Re}\,(x_0 - y_0 \mid y_0 - y) + \|y_0 - y\|^2 \\ &\geq \|x_0 - y_0\|^2 \,.\end{aligned}$$

$(i) \Rightarrow (ii)$. Sei $y \in C$. Sei $0 \leq \lambda \leq 1$. Dann ist

$$\begin{aligned}\|x_0 - y_0\|^2 &\leq \|x_0 - (1-\lambda)y_0 - \lambda_y\|^2 \\ &= (x_0 - y_0 + \lambda(y_0 - y) \mid x_0 - y_0 + \lambda(y_0 - y)) \\ &= \|x_0 - y_0\|^2 + 2\lambda\mathrm{Re}\,(x_0 - y_0 \mid y_0 - y) + \lambda^2\|y_0 - y\|^2 \,.\end{aligned}$$

Damit ist $\mathrm{Re}\,(x_0 - y_0 \mid y - y_0) \leq \frac{\lambda}{2}\|y_0 - y\|^2$ für $0 < \lambda \leq 1$. Daraus folgt (ii) . $\square$

Kapitel 7

Räume integrierbarer Funktionen

Eine der wichtigsten Beispielklassen von Banachräumen werden mit Hilfe von Lebesgue integrierbaren Funktionen gebildet. In diesem Kapitel geben wir einen kurzen Abriß von Maß und Integral, um dann ausführlicher funktionalanalytische Eigenschaften zu diskutieren.

7.1 Maße

In diesem Abschnitt stellen wir elementare Eigenschaften von Maßen zusammen. Für weitere Information verweisen wir auf Lehrbücher wie etwa Bartle [Ba] oder Rudin [Ru].

Sei Ω eine Menge. Eine Teilmenge Σ der Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ von Ω heißt σ **-Algebra**, falls gilt:

(a) $A^c := \Omega \setminus A \in \Sigma$ für alle $A \in \Sigma$;

(b) $\Omega \in \Sigma$;

(c) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Sigma$, falls $A_n \in \Sigma \quad (n \in \mathbb{N})$.

Damit ist auch die leere Menge $\emptyset$ in Σ und Σ ist stabil gegenüber abzählbaren Vereinigungen.

Es ist unmittelbar klar, dass die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra ist. Ferner ist der Durchschnitt von σ-Algebren wieder eine σ-Algebra. Damit gibt es zu jeder Teilmenge $\mathcal{A}$ von $\mathcal{P}(\Omega)$ eine kleinste σ-Algebra $\sigma(\mathcal{A})$ die $\mathcal{A}$ enthält (es ist nämlich $\sigma(\mathcal{A})$ der Durchschnitt aller σ-Algebren, die $\mathcal{A}$ umfassen).

Definition 7.1.1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Die kleinste σ-Algebra, die alle offenen Teilmengen von Ω enthält, heißt die* **Borelalgebra**. *Wir bezeichnen sie mit $\mathcal{B}(\Omega)$. Die Elemente von $\mathcal{B}(\Omega)$ heißen* **Borelmengen**.

Als nächstes führen wir den Begriff des Maßes ein.

Definition 7.1.2. *Sei Σ eine σ-Algebra von Teilmengen von Ω. Ein Maß μ auf Σ ist eine Abbildung $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$, so dass*

(a) $\mu(\emptyset) = 0$ *;*

(b) $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ *falls* $A_n \in \Sigma$, $A_n \cap A_m = \emptyset$ *für* $n \neq m$.

Die Eigenschaft (b) heißt **σ-Additivität**. Diese ist entscheidend für die günstigen analytischen Eigenschaften des Lebesgue Integrals (nämlich die Sätze über die monotone Konvergenz und die dominierte Konvergenz).

Folgerungen 7.1.3. *Sei μ ein Maß auf einer σ-Algebra Σ. Dann gilt:*

(7.1) $\mu(A) \leq \mu(B)$ *, wenn* $A, B \in \Sigma$, $A \subset B$ *;*

(7.2) $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$ *, wenn* $A, B \in \Sigma$, $A \subset B$ *und* $\mu(B) < \infty$ *;*

(7.3) $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ *, wenn* $A_n \in \Sigma$ *, so dass* $A_n \subset A_{n+1}$ *(* $n \in \mathbb{N}$ *);*

(7.4) $\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ *, wenn* $A_n \in \Sigma$ *, so dass* $A_{n+1} \subset A_n$ *(* $n \in \mathbb{N}$ *) und* $\mu(A_1) < \infty$.

Beweis. Seien $A, B \in \Sigma$, $A \subset B$. Dann ist $B = A \cup (B \setminus A)$. Also folgt aus (b), dass $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$. Daraus folgt (7.1) und (7.2). Sei $A_n \in \Sigma$, $A_n \subset A_{n+1}$, $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Setze $B_1 = A_1$, $B_{n+1} = A_{n+1} \setminus A_n \quad (n \geq 1)$. Dann ist $B_n \cap B_m = \emptyset$, falls $n \neq m$, $A_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Aus der σ -Additivität folgt, dass $\mu(A) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(B_k) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$. Damit ist (1.3) bewiesen.

Sei jetzt $A_n \in \Sigma$, $A_{n+1} \subset A_n$, $\mu(A_1) < \infty$. Setze $B_n = A_1 \setminus A_n$. Dann ist $B_n \subset B_{n+1}$ und $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n = A_1 \setminus \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Also folgt aus (1.2) und (1.3), dass $\mu(A_1) - \mu(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \mu(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(B_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (\mu(A_1) - \mu(A_n))$. Daraus folgt (1.4). $\square$

Das für die Anwendungen wichtigste Maß ist das Lebesgue Maß. Es wird durch den folgenden Satz beschrieben, den wir hier nicht beweisen wollen.

Satz 7.1.4 (Lebesgue Maß)**.** *Es gibt genau ein Maß* λ *auf* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ *, so dass*

$$\lambda(\prod_{n=1}^{d} (a_n, b_n]) = \prod_{n=1}^{d} (b_n - a_n) \ , \tag{7.5}$$

falls $-\infty < a_n < b_n < \infty \quad (n = 1, \ldots, d)$ *. Das Maß* λ *heißt das* **Lebesgue Maß***.*

Die Eigenschaft (7.5) besagt, dass das Lebesgue Maß eines Quaders durch seinen Rauminhalt gegeben ist. Daher definieren wir $\lambda(A)$ als das **Volumen** einer Borelmenge $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Wir nennen noch weitere Eigenschaften des Lebesguemaßes ohne Beweis.

Satz 7.1.5 (Eigenschaften des Lebesgue Maßes)**.** *Sei* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $b \in \mathbb{R}^d$.

(7.6) *Es ist* $A + b \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ *und* $\lambda(A + b) = \lambda(A)$ **(Translationsinvarianz)***;*

(7.7) $\lambda(A) = \inf\{\lambda(O) : O \subset \mathbb{R}^d$ *offen* $A \subset O\}$ **(äußere Regularität)**;

(7.8) $\lambda(A) = \sup\{\lambda(K) : K \subset \mathbb{R}^d$ *kompakt* $K \subset A\}$ **(innere Regularität)**;

(7.9) $\lambda(B(x,r)) = (1/d)\ |S^{d-1}| \cdot r^d$ *wobei* $S^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}$ *die* **Sphäre** *vom Radius 1 in* $\mathbb{R}^d$ *ist und* $|S^{d-1}| = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ *deren Oberfläche.*

Nun wenden wir uns wieder allgemeinen Maßen zu. Sei (Ω, Σ, μ) ein **Maßraum**; d.h. Ω ist eine Menge, Σ eine σ-Algebra von Teilmengen von Ω und $\mu : \sigma \to [0, \infty]$ ein Maß.

Definition 7.1.6 (Induziertes Maß). *Sei* $\Omega' \in \Sigma$. *Dann ist* $\Sigma' = \{A \in \Sigma : A \subset \Omega'\}$ *eine* σ*-Algebra auf* Ω' *und die Einschränkung von* μ *auf* Σ' *ein Maß. Ist* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *eine offene Teilmenge von* $\mathbb{R}^d$, *so ist* $\mathcal{B}(\Omega) = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) : A \subset \Omega\}$. *Die Einschränkung von* λ *auf* $\mathcal{B}(\Omega)$ *bezeichnen wir ebenfalls mit* λ *und nennen sie das* **Lebesguemaß** *auf* $\mathcal{B}(\Omega)$ *(oder auch auf* Ω*)*.

Unter einer **Nullmenge** verstehen wir ein Element N von Σ, so dass $\mu(N) = 0$. Es ist klar, dass die abzählbare Vereinigung von Nullmengen eine Nullenge ist. Offensichtlich sind einelementige Mengen in $\mathbb{R}^d$ Nullmengen bzgl. des Lebesguemaßes. Also ist jede abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ eine Lebesguenullmenge.

Für $x \in \Omega$ sei eine Eigenschaft $P(x)$ gegeben. Wir sagen, dass die Eigenschaft μ**-fast überall** gilt, falls es eine Nullmenge $N \in \Sigma$ gibt, so dass $P(x)$ für alle $x \in \Omega \setminus N$ wahr ist.

7.2 Integrierbare Funktionen

In diesem Abschnitt definieren wir das Lebesgue Integral und beweisen die wichtigen Konvergenzsätze.

Sei Ω eine Menge und Σ eine σ-Algebra von Teilmengen von Ω.

Definition 7.2.1. *Sei* $f : \Omega \to \mathbb{K}$ *eine Funktion. Ist* $\mathbb{K} = R$ *, so heißt* f **messbar***, falls für jedes* $t \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\{x \in \Omega : f(x) > t\} \in \Sigma \ .$$

Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *, so heißt* f *messbar, falls* $Re\, f$ *und* $Im\, f$ *messbar sind.*

Ist f messbar, so sieht man leicht, dass

$$f^{-1}(B) \in \Sigma \tag{7.10}$$

für jede Borelmenge B in $\mathbb{R}$.

Folgende Eigenschaften sind leicht einzusehen. Die messbaren Funktionen von Ω nach $\mathbb{K}$ bilden einen $\mathbb{K}$ -Vektorraum bzgl. punktweise definierter Operationen. Ist f messbar, so ist auch $|f|$ messbar, wobei $|f|(x) = |f(x)| \quad (x \in \Omega)$. Sind $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar, so sind auch $f \vee g$, $f \wedge g$, f^+ , f^- messbar, wobei

$$\begin{aligned}
&(f \vee g)(x) = \max\{f(x) \ , \ g(x)\} \ , \\
&(f \wedge g)(x) = \min\{f(x) \ , \ g(x)\} \\
&f^+ = f \vee 0 \ , \\
&f^- = (-f) \vee 0 \ .
\end{aligned}$$

Beispiel 7.2.2 (Einfache Funktionen)**.** a) Sei $A \subset \Omega$. Mit 1_A bezeichnen wir die **charakteristische Funktion** von A d.h.

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn} \quad x \in A \ ; \\ 0 & \text{wenn} \quad x \in \Omega \setminus A \ . \end{cases}$$

Man sieht unmittelbar, dass 1_A genau dann messbar ist, wenn $A \in \Sigma$.

b) Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{K}$ heißt **einfach**, falls sie nur endlich viele Werte annimmt. Eine solche Funktion hat eine eindeutige Darstellung

$$f = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j 1_{A_j} \tag{7.11}$$

mit $\alpha_j \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$, $A_j \subset \Omega$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, wenn $i \neq j$. Man sieht leicht, dass f genau dann messbar ist, wenn

$A_j \in \Sigma\ ,\ j = 1, \dots, m\ .$

Sei nun (Ω, Σ, μ) ein Maßraum. Ist $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$ eine messbare Funktion, so betrachten wir die **Niveaumengen**

$$\{f > t\} := \{x \in \Omega : f(x) > t\}$$

wobei $t \in \mathbb{R}$. Dann ist $\{f > t\} \subset \{f > s\}$, wenn $t \geq s$. Damit ist die Funktion

$$F(t) = \mu(\{f > t\})$$

monoton fallend. Wir definieren nun das Integral von f durch

$$\int\limits_\Omega f(x) d\mu(x) := \int_0^\infty F(t)\ dt := \sup_{\varepsilon > 0} \int\limits_\varepsilon^{1/\varepsilon} F(t)\ dt\ . \tag{7.12}$$

Dabei ist $\int\limits_\varepsilon^{1/\varepsilon} F(t)\ dt$ das Riemann-Integral der monotonen Funktion F . Ferner setzen wir $\int_\Omega f(x)d\mu(x) = \infty$, falls $F(t) = \infty$ für ein $t > 0$ oder falls

$$\sup_{\varepsilon > 0} \int\limits_\varepsilon^{1/\varepsilon} F(t)\ dt = \infty\ .$$

Man mache sich klar, dass das Integral als Summe der Maße der Niveaumengen anschaulich dem Flächeninhalt unter dem Graphen der Funktion entspricht.

Eine messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt **integrierbar**, falls f^+ und f^- integrierbar sind. In dem Fall setzen wir

$$\int\limits_\Omega f(x) d\mu(x) = \int\limits_\Omega f^+(x) d\mu(x) - \int\limits_\Omega f^-(x) d\mu(x)\ . \tag{7.13}$$

Schließlich heißt $f : \Omega \to \mathbb{K}$ integrierbar, falls $Re\, f$ und $Im\, f$ integrierbar sind, und dann setzen wir

$$\int\limits_\Omega f(x) d\mu(x) = \int\limits_\Omega Re\ f(x) d\mu(x) + i \int\limits_\Omega (Im\ f)(x) d\mu(x)\ . \tag{7.14}$$

Damit ist $f : \Omega \to \mathbb{K}$ genau dann integrierbar, wenn f messbar ist und

$$\int_\Omega |f(x)| d\mu(x) < \infty \ . \tag{7.15}$$

Als nächstes berechnen wir das Integral von einfachen Funktionen. Dazu benutzen wir folgenden Hilfssatz, dessen Beweis wir dem Leser überlassen.

Lemma 7.2.3. *Seien* $A_j \in \Sigma$ *mit* $\mu(A_j) < \infty$ *und* $\alpha_j \in \mathbb{K}$, $j = 1 \ldots m$. *Ist* $\sum\limits_{j=1}^m \alpha_j 1_{A_j} = 0$, *so gilt* $\sum\limits_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j) = 0$.

Satz 7.2.4. *Sei*

$$f = \sum_{j=1}^m \alpha_j 1_{A_j}$$

eine einfache Funktion, wobei $A_j \in \Sigma$, $\mu(A_j) < \infty$, $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots m$. *Dann ist* f *integrierbar und*

$$\int_\Omega f(x) d\mu(x) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j) \ .$$

Beweis. Wir können annehmen, dass $f(x) \in \mathbb{R}_+$ für alle $x \in \Omega$. Wegen Lemma 7.2.3 können wir ferner annehmen, dass f in **Standard-Darstellung** gegeben ist; d.h. $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i = j$ und $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_m$. Setze $\alpha_0 = 0$. Dann ist

$$\{f > t\} = \begin{cases} \bigcup\limits_{k=j}^m A_k & \text{wenn} \quad t \in [\alpha_{j-1}, \alpha_j) \\ \emptyset & \text{wenn} \quad t \geq \alpha_m \ , \end{cases}$$

wobei $j = 1, \ldots, m$. Somit ist

$$\begin{aligned} F &= \bigcup_{k=j}^m A_k \ 1_{[\alpha_{j-1}, \alpha_j]} \\ &= \sum_{k=j}^m \mu(A_k) \ 1_{[\alpha_{j-1}, \alpha_j)} \ . \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\int_0^\infty F(t) \ dt = \sum_{j=1}^m \sum_{k=j}^m \mu(A_k)(\alpha_j - \alpha_{j-1}) = \sum_{j=1}^m \mu(A_j)\alpha_j \ .$$

□

Stimmt eine messbare Funktion $g : \Omega \to \mathbb{K}$ fast überall mit einer integrierbaren Funktion $f : \Omega \to \mathbb{K}$ überein, so ist auch g integrierbar und $\int_\Omega g(x)d\mu(x) = \int_\Omega f(x)d\mu(x)$. Das folgt unmittelbar aus der Definition. Insbesondere ist

$$\int_\Omega g(x)d\mu(x) = 0$$

falls g messbar ist und $g(x) = 0 \quad \mu-$ f.ü. Umgekehrt gilt folgendes:

Lemma 7.2.5. *Sei* $f : \Omega \to [0, \infty]$ *messbar. Es ist* $\int_\Omega f(x)d\mu(x) = 0$ *genau dann, wenn* $f(x) = 0 \quad \mu-$ *f.ü.*

Beweis. Sei $\int_\Omega f(x)d\mu(x) = 0$. Dann ist $\int_0^b F(t)d\mu(t) = 0$ für alle $b > 0$, wobei $F(t) = \mu(\{x : f(x) > t\})$ monoton fällt. Aus der Definition des Riemann Integrals folgt, dass $F(t) = 0$ für $t > 0$. Da $\{x : f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x : f(x) > 1/n\}$, folgt aus (7.3), dass $\mu(\{x : f(x) \neq 0\}) = 0$. Damit ist $f(x) = 0 \ \mu-$ f.ü. □

Wir benötigen folgenden einfachen Konvergenzsatz für das Riemann Integral.

Lemma 7.2.6. *Sei* $F_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *monoton fallend. Ferner gelte* $F_n(t) \leq F_{n+1}(t)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$. *Sei* $F(t) = \sup_{n\in\mathbb{N}} F_n(t)$. *Dann gilt*

$$\int_0^\infty F(t)\ dt = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_0^\infty F_n(t)\ dt\ . \tag{7.16}$$

Beweis. Im folgenden benutzen wir Bezeichnungen aus 3.5. Sei $c < \int_0^\infty F(t)\ dt$. Dann gibt es $b > 0$, so dass $\int_0^b F(t)\ dt > c$. Es existiert eine $ZmZ\ \pi$, so dass $S(F, \pi) > c$. Da $\lim_{n\to\infty} S(F_n, \pi) = S(F, \pi)$, gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $S(F_{n_0}, \pi) > c$. Da F_{n_0} monoton fallend ist, gibt es $ZmZ\ \pi_k$ feiner als π , so dass $|\pi_k| \to 0 \quad (k \to \infty)$ und $S(F_{n_0}, \pi_k) \geq S(F_{n_0}, \pi) > c$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Damit ist $\int_0^b F_{n_0}(t)\ dt = \lim_{k\to\infty} S(F_{n_0}, \pi_k) \geq c$. Folglich ist $\int_0^b F_n(t)\ dt \geq \int_0^b F_{n_0}(t)\ dt \geq c$ für alle $n \geq n_0$. □

Grenzwerte messbarer Funktionen sind messbar:

Lemma 7.2.7. *a) Sei* $f_n : \Omega \to [0,\infty]$ *messbar. Dann ist* $\liminf_{n\to\infty} f_n$ *messbar.*
b) Sei $f_n : \Omega \to \mathbb{K}$ *messbar. Es existiere* $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ *für alle* $x \in \Omega$ *. Dann ist* f *messbar.*

Beweis. a) Sei $g_k(x) = \inf\limits_{n\geq k} f_n(x)$. Sei $t \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\{g_k \geq t\} = \bigcap_{n\geq k} \{f_n \geq t\} \in \Sigma \ .$$

Also ist $\{g_k > t\} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \{g_k \geq t + 1/n\} \in \Sigma$. Damit ist g_k messbar. Sei $f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \sup\limits_k g_k(x)$. Es ist $\{f > t\} = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \{g_k > t\} \in \Sigma$.
b) Wir können den Beweis von a) auf $Re\, f$ und $Im\, f$ anwenden. □

Nun beweisen wir den Satz von **Beppo Levi**, der auch **Satz über die monotone Konvergenz** genannt wird.

Satz 7.2.8 (Beppo Levi)**.** *Sei* $f_n : \Omega \to \mathbb{R}_+$ *integrierbar,* $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $x \in \Omega$ *. Sei* $f(x) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ *. Dann gilt*

$$\int_\Omega f(x) d\mu(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n(x) d\mu(x) \ . \tag{7.17}$$

Bemerkung 7.2.9. Die Ausdrücke in (7.17) können den Wert ∞ annehmen. Insbesondere zeigt der Satz, dass f genau dann integrierbar ist, wenn

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n(x) d\mu(x) < \infty \ .$$

In dem Fall ist dann $f(x) < \infty$ $\mu-$ f.ü.

Beweis. Für $t \geq 0$ sei $F_n(t) = \mu(\{f_n > t\})$, $F(t) = \mu(\{f > t\})$. Dann ist $F_n(t) \leq F_{n+1}(t)$. Da $\{f > t\} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \{f_n > t\}$, gilt nach (7.3),

$$F(t) = \sup_{n\in\mathbb{N}} F_n(t) \ . \tag{7.18}$$

Damit folgt (7.17) aus Lemma 7.2.6. □

Jede positive messbare Funktion ist Grenzwert von einfachen Funktionen. Genauer gilt folgendes:

Lemma 7.2.10. *Sei* $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$ *messbar. Dann gibt es eine Folge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *von einfachen messbaren Funktionen, derart dass*

(a) $0 \le f_n(x) \le f_{n+1}(x) \quad (x \in \Omega\ ,\ n \in \mathbb{N})$ *;*

(b) $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad (x \in \Omega)$ *.*

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$. Setze

$$f_n = \sum_{k=1}^{n2^n} k \cdot 2^{-n} 1_{E_k}$$

wobei $E_k = \{x : k2^{-n} \le f(x) < (k+1)2^{-n}\}$. □

Aus unserer Definition ist nicht unmittelbar klar, dass das Integral linear ist. Das zeigen wir nun mit Hilfe des Satzes von Beppo Levi. Mit $\mathcal{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ bezeichnen wir die Menge der integrierbaren Funktionen von Ω nach $\mathbb{K}$.

Satz 7.2.11. $\mathcal{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ *ist ein* $\mathbb{K}$ *-Vektorraum und die Abbildung*

$$f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu) \mapsto \int_\Omega f(x) d\mu(x)$$

ist linear. Ferner gilt

$$|\int_\Omega f(x) d\mu(x)| \le \int_\Omega |f(x)| d\mu(x) \tag{7.19}$$

für alle $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ *. Sind schließlich* $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ *integrierbar, so dass* $f(x) \le g(x)$ $\mu-f.ü.$ *, so ist*

$$\int_\Omega f(x) d\mu(x) \le \int_\Omega g(x) d\mu(x) \ . \tag{7.20}$$

Beweis. 1. Es folgt aus Satz 7.2.4, dass $f \mapsto \int_\Omega f(x)d\mu(x)$ linear auf den integrierbaren einfachen Funktionen ist.

2. Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{R}_+$ integrierbar. Nach Lemma 7.2.10 gibt es einfache integrierbare Funktionen $f_n, g_n : \Omega \to \mathbb{R}_+$, so dass $f_n \leq f_{n+1}$, $g_n \leq g_{n+1}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$ für alle $x \in \Omega$. Aus dem Satz über die monotone Konvergenz folgt, dass

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (f+g)d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega (f_n + g_n)d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} (\int_\Omega f_n d\mu + \int_\Omega g_n d\mu) \\
&= \int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu \ ,
\end{aligned}$$

wobei wir 1. benutzt haben.

3. Seien $f, f_1, f_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ integrierbar, $f_1, f_2 \geq 0$, $f = f_1 - f_2$. Dann gilt $\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega f_1 d\mu - \int_\Omega f_2 d\mu$. Das folgt aus 2., da $f_+ - f_- = f_1 - f_2$, also $\int_\Omega f_+ d\mu + \int_\Omega f_2 d\mu = \int_\Omega (f_+ + f_2)d\mu = \int_\Omega (f_1 + f_-)d\mu = \int_\Omega f_1 d\mu + \int_\Omega f_- d\mu$. Also $\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega f_+ d\mu - \int_\Omega f_- d\mu = \int_\Omega f_1 d\mu - \int_\Omega f_2 d\mu$.

4. Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann ist $f + g = f^+ + g^+ - (f^- + g^-)$. Aus 3. folgt, dass $\int_\Omega (f+g)d\mu = \int_\Omega f^+ d\mu + \int_\Omega g^+ d\mu - (\int_\Omega f^- d\mu) - (\int_\Omega g^- d\mu) = (\int_\Omega f d\mu) + (\int_\Omega g d\mu)$. Die Homogenität ergibt sich ähnlich.

5. Es folgt aus der Definition, dass $(\int_\Omega f d\mu) \leq (\int_\Omega g d\mu)$, wenn $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ integrierbar sind und $f \leq g$ fast überall. Sei nun $f : \Omega \to \mathbb{C}$ integrierbar. Sei $\theta \in \mathbb{R}$, so dass $|\int_\Omega f d\mu| = e^{i\theta} \int_\Omega f d\mu = \int_\Omega (e^{i\theta} f)d\mu$. Dann ist $|\int_\Omega f d\mu| = \int_\Omega Re\ (e^{i\theta} f)d\mu \leq \int_\Omega |f| d\mu$. □

Ist eine Folge positiver integrierbarer Funktionen nicht monoton wachsend, so kann man die Identität (7.17) durch die folgende nützliche Ungleichung (7.21) ersetzen.

Lemma 7.2.12 (Fatou)**.** *Sei* $f_n : \Omega \to \mathbb{R}_+$ *integrierbar* $(n \in \mathbb{N})$. *Sei* $f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \quad (x \in \Omega)$. *Dann gilt*

$$\int\limits_\Omega f(x)d\mu(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \int\limits_\Omega f_n(x)d\mu(x) \tag{7.21}$$

Bemerkung 7.2.13. In (7.21) können die Werte ∞ auftreten. Die Ungleichung zeigt insbesondere, dass f integrierbar ist, falls $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_\Omega f_n(x)d\mu(x) < \infty$.

Man kann das Lemma von Fatou auch so formulieren: Das Integral ist auf der Menge $\mathcal{M}$ der integrierbaren Funktionen von Ω nach $\mathbb{R}_+$ nach unten halbstetig, wenn die punktweise Konvergenz auf $\mathcal{M}$ betrachtet wird (vgl. Aufgabe 7.2.16).

Beweis. Wir hatten gesehen, dass f messbar ist. Sei $g_k = \inf\limits_{n\geq k} f_n$. Dann ist nach (7.20) $\int\limits_\Omega g_k d\mu \leq \inf\limits_{n\geq k} \int\limits_\Omega f_n d\mu$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Da $g_k \leq g_{k+1}$, folgt aus Satz von der monotonen Konvergenz (Satz 7.2.8), dass $\int\limits_\Omega f d\mu = \int\limits_\Omega (\sup\limits_k g_k) d\mu = \sup\limits_k \int\limits_\Omega g_k d\mu \leq \sup\limits_k \inf\limits_{n\geq k} \int\limits_\Omega f_n d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int\limits_\Omega f_n d\mu$. □

Schließlich beweisen wir den Satz von Lebesgue, der auch der **Satz von der dominierten Konvergenz** genannt wird.

Theorem 7.2.14 (Lebesgue)**.** *Seien* $f_n : \Omega \to \mathbb{K}$ *integrierbare Funktionen,*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad (x \in \Omega) \ .$$

Es gebe eine integrierbare Funktion $g : \Omega \to \mathbb{R}_+$ *, so dass* $|f_n(x)| \leq g(x)\ \mu-$ *f.ü. Dann ist* f *integrierbar und*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega |f_n(x) - f(x)| d\mu(x) = 0 \ ; \tag{7.22}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n(x)d\mu(x) = \int_\Omega f(x)d\mu(x)\ . \tag{7.23}$$

Beweis. Es ist $|f(x)| \le g(x)$ für fast alle $x \in \Omega$. Daher ist

$$G(t) := \mu(\{g > t\}) \le \mu(\{f > t\}) =: F(t) \quad (t \ge 0)\ .$$

Also ist $\int_\Omega f(x)d\mu(x) = \int_0^\infty F(t)\ dt \le \int_0^\infty G(t)\ dt = \int_\Omega g(x)d\mu(x) < \infty$. Also ist f integrierbar. Somit ist $h := |f| + |g|$ integrierbar und $|f_n - f| \le h \quad (n \in \mathbb{N})$. Aus dem Lemma von Fatou folgt, dass

$$\begin{aligned}
\int_\Omega h d\mu &= \int_\Omega \liminf_{n\to\infty}(h - |f_n - f|)d\mu \\
&\le \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega (h - |f_n - f|)d\mu \\
&= \int_\Omega h d\mu - \limsup_{n\to\infty}\int_\Omega |f_n - f| d\mu\ .
\end{aligned}$$

Damit ist $\limsup_{n\to\infty}\int_\Omega |f_n - f|d\mu \le 0$, und (7.22) ist bewiesen. Wegen (7.19) folgt daraus $\limsup_{n\to\infty}|\int_\Omega f_n d\mu - \int_\Omega f d\mu| = \limsup_{n\to\infty}|\int_\Omega (f_n - f)d\mu| \le \limsup_{n\to\infty}\int_\Omega |f_n - f|d\mu = 0$. □

Bemerkung 7.2.15. Die Bedingung der Domination kann im Satz von Lebesgue nicht weggelassen werden. Betrachte etwa das Lebesgue Maß auf $\mathbb{R}$, $f_n = 1_{[n,n+1)}$. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ aber $\int_\mathbb{R} f_n(x)dx = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 7.2.16. *Sei M ein metrischer Raum. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:*

(a) *f ist nach* **unten halbstetig**; *d.h. für alle $a \in M$, $c < f(a)$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass $d(a,x) < \delta \Rightarrow f(x) > c$.*

(b) *$\{f(x) \le c\}$ ist abgeschlossen für jedes $c \in \mathbb{R}$;*

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow f(x) \le \liminf\limits_{n\to\infty} f(x_n)$.

7.3 Die $\mathrm{L^p}$– Räume

Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum. Zunächst führen wir den Raum L^∞ ein. Eine messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{K}$ heißt **wesentlich beschränkt**, falls es eine Konstante $c \geq 0$ gibt, so dass

$$|f(x)| \leq c \quad \text{f.ü.}\,. \tag{7.24}$$

Für solch eine Funktion setzen wir

$$\|f\|_\infty = \inf\{c \geq 0 : \text{ (2.1.) gilt}\}\,. \tag{7.25}$$

Dann gilt

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty \quad \text{f.ü.}\,. \tag{7.26}$$

Beweis. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $A_k = \{x \in \Omega : f(x) > \|f\|_\infty + 1/k\}$ eine Nullmenge. Also ist auch $A := \{x \in \Omega \;;\; f(x) > \|f\|_\infty\} = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} A_k$ eine Nullmenge. □

Daraus schließen wir unmittelbar: Sind $f, g : \Omega \to \mathbb{K}$ messbar und wesentlich beschränkt, so ist auch $f + g$ wesentlich beschränkt und

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty\,. \tag{7.27}$$

Ferner gilt:

$$\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\; \|f\|_\infty \quad (\lambda \in \mathbb{K})\,, \tag{7.28}$$

$$\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \quad \text{f.ü.}\,. \tag{7.29}$$

Wir nennen zwei messbare Funktionen $f, g : \Omega \to \mathbb{K}$ **äquivalent**, falls

$$f(x) = g(x) \quad \text{f.ü.}\,.$$

Mit $L^\infty = L^\infty(\Omega) = L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ bezeichnen wir die Menge aller Äquivalenzklassen von wesentlich beschränkten messbaren Funktionen. Um die Notationen nicht unnötig zu verkomplizieren benutzt man üblicherweise für Funktionen und ihre Äquivalenzklasse dasselbe Symbol. Für zwei Elemente

$f, g \in L^\infty$ bedeutet insbesondere $f = g$ (in L^∞) , dass $f(x) = g(x)$ f.ü.. Da die Vereinigung zweier Nullmengen wieder eine Nullmenge ist, wird durch die punktweise Addition und Skalarmultiplikation eine Vektorraumstruktur auf L^∞ definiert. Ferner ist $\| \, \|_\infty$ eine Norm auf L^∞ .

Satz 7.3.1. *Der Raum* $(L^\infty, \| \, \|_\infty)$ *ist ein Banachraum.*

Beweis. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in L^∞ . Zu $k \in \mathbb{N}$ gibt es $n_k \in \mathbb{N}$, so dass

$$\|f_n - f_m\|_\infty \leq \frac{1}{k} \quad \text{für alle} \quad n, m \geq n_k \,. \tag{7.30}$$

Da die abzählbare Vereinigung von Nullmengen eine Nullmenge ist, gibt es Nullmengen $N_k \in \Sigma$, so dass

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{1}{k} \tag{7.31}$$

für alle $n, m \geq n_k$ und $x \in \Omega \setminus N_k$. Damit ist $N = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} N_k \in \Sigma$ eine Nullmenge und $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge für alle $x \in \Omega \setminus N$. Setze

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) & \text{falls} \quad x \notin N \,, \\ 0 & \text{falls} \quad x \in N \,. \end{cases}$$

Dann ist f messbar. Aus (7.31) folgt mit $m \to \infty$, dass

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k}$$

für alle $x \in \Omega \setminus N$ und $n \geq n_k$. Damit ist $f \in L^\infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$. □

Als nächstes führen wir die L^p– Räume ein. Dazu betrachten wir eine reelle Zahl $p \in [1, \infty)$. Ist $f : \Omega \to \mathbb{K}$ messbar, so setzen wir

$$\|f\|_p := \left(\int |f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \in [0, \infty] \,.$$

Sei $q \in (1, \infty]$ der zu p konjugierte Index; d.h. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Wir beweisen zunächst:

Satz 7.3.2 (Hölder Ungleichung)**.** *Seien* $f,g:\Omega\to\mathbb{K}$ *messbar. Dann gilt*

$$\int_\Omega |fg|d\mu \le \|f\|_p\|g\|_q\,. \tag{7.32}$$

Beweis. Wir können voraussetzen, dass $\|f\|_p<\infty$ und $\|g\|_q<\infty$, sonst ist die Ungleichung trivial. Es reicht (7.32) zu zeigen, falls $\|f\|_p=\|g\|_q=1$ (andernfalls betrachte man $f/\|f\|_p$ und $g/\|g\|_q$) . Für $a,b\ge 0$ gilt

$$a^{\frac1p}b^{\frac1q}\le \tfrac1p a+\tfrac1q b$$

(siehe (7.19)). Angewandt auf $a=|f(x)|^p$ und $b=|g(x)|^q$ ergibt dieses

$$\int_\Omega |f(x)|\;|g(x)|d\mu\le\frac1p\int_\Omega |f(x)|^p d\mu+\frac1q\int_\Omega |g(x)^q d\mu=\frac1p+\frac1q=1\,.$$

□

Ähnlich wie bei ℓ^p (Lemma 3.3.10) leitet man aus der Hölderungleichung die **Minkowski'sche Ungleichung**

$$\|f+g\|_p\le\|f\|_p+\|g\|_p \tag{7.33}$$

her, wobei $f,g:\Omega\to\mathbb{K}$ messbar sind.

Beweis. Ist $p=1$, so folgt (7.33) aus den elementaren Eigenschaften des Lebesgue Integrals. Sei $1<p<\infty$. Dann folgt wegen $(p-1)q=p$ aus der Hölderungleichung, dass

$$\begin{aligned}\int |f+g|^p d\mu &= \int |f+g|^{p-1}|f+g|d\mu\\ &\le \int |f+g|^{p-1}|f|d\mu+\int |f+g|^{p-1}|g|d\mu\\ &\le (\int |f+g|^{(p-1)q}d\mu)^{\frac1q}\|f\|_p+(\int |f+g|^{(p-1)q}d\mu)^{\frac1q}\|g\|_p\\ &= (\int |f+g|^p d\mu)^{\frac1q}(\|f\|_p+\|g\|_p)\,.\end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}\|f+g\|_p &= (\int |f+g|^p d\mu)^{1-\frac1q}\\ &\le \|f\|_p+\|g\|_p\,.\end{aligned}$$

$\square$

Es ist unmittelbar klar, dass für eine messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{K}$

$$\|\lambda f\|_p = |\lambda| \; \|f\|_p \quad (\lambda \in \mathbb{K}) \quad \text{und} \tag{7.34}$$

$$\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \quad \text{f.ü.} \tag{7.35}$$

Wir definieren nun $L^p = L^p(\Omega) = L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ als Menge der Äquivalenzklassen derjenigen messbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{K}$ für die $\|f\|_p < \infty$. Dann ist L^p ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ bzgl. punktweise definierter Addition und Skalarmultiplikation und $\| \; \|_p$ ist eine Norm auf L^p .

Satz 7.3.3. *Der Raum* $(L^p \; , \; \| \; \|_p)$ *ist ein Banachraum* $(1 \leq p < \infty)$.

Beweis. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in L^p . Wir können annehmen, dass

$$\|f_{n+1} - f_n\|_p \leq 2^{-n} \; ,$$

andernfalls gehen wir zu einer Teilfolge über (vgl. Lemma 1.3.3).
Sei $g_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|$. Dann ist $g_n : \Omega \to \mathbb{R}_+$ messbar und $g_n \leq g_{n+1}$. Ferner ist $\|g_n\|_p \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \|f_{k+1} - f_k\|_p \leq 1$. Sei $g(x) = \sup\limits_n g_n(x)$. Nach dem Satz von Beppo Levi ist $g \in L^p(\Omega)$,. Insbesondere ist $g(x) < \infty$ f.ü. . Sei $m \geq n \geq 2$. Dann ist

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &\leq |f_m(x) - f_{m-1}(x)| + \ldots + |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| \\ &\leq g(x) - g_{n-1}(x) \; . \end{aligned}$$

Damit ist $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge für fast alle $x \in \Omega$. Also gibt es eine messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{K}$, so dass $f(x) = \lim\limits_{m\to\infty} f_m(x)$ f.ü. . Ferner folgt aus obiger Ungleichung mit $m \to \infty$,

$$|f(x) - f_n(x)| \leq g(x) - g_{n-1}(x) \leq g(x) \quad \text{f.ü. .} \tag{7.36}$$

Also auch

$$|f_m(x) - f_n(x)|^p \leq g(x)^p \quad \text{f.ü.} \quad (n \geq 2) \ .$$

Damit ist $f = (f - f_n) + f_n \in L^p(\Omega)$ und aus dem Satz von Lebesgue folgt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$. □

Aus dem Beweis entnehmen wir folgende wichtige Eigenschaft: Jede in L^p konvergente Folge hat eine Teilfolge, die fast überall konvergiert. Genauer gilt:

Korollar 7.3.4. *Sei* $1 \leq p < \infty$ *. Sei* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $L^p(\Omega)$ *, die gegen* $f \in L^p(\Omega)$ *im Sinne von* L^p *konvergiert. Dann gibt es eine Teilfolge* $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *und* $h \in L^p(\Omega)$ *, so dass*

(a) $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$ *f.ü. ;*

(b) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ *f.ü. .*

Beweis. Man wähle $h = g + |f|$ im Beweis von Satz 7.3.3. □

Schließlich notieren wir die folgende wichtige Folgerung:

Korollar 7.3.5. *Der Raum* $L^2(\Omega)$ *ist en Hilbertraum für das Skalarprodukt*

$$(f \mid g) = \int\limits_\Omega f(x)\overline{g(x)}d\mu(x) \ .$$

7.4 Dualität

Die L^p -Räume sind für $1 < p < \infty$ reflexiv und L^2 ist ein Hilbertraum. Diese Tatsache ist von größter Bedeutung für die Anwendungen. Wir beschränken uns hier auf die Beschreibung der Resultate, ohne Beweise zu geben.

Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum. Sei $1 < p < \infty$ und sei q der konjungierte Index, d.h. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sei $g \in L^q(\Omega)$. Aus der Hölderungleichung folgt, dass

$$\varphi_g(f) = \int\limits_\Omega fg d\mu \tag{7.37}$$

eine stetige Linearform φ_g auf $L^p(\Omega)$ definiert mit $\|\varphi_g\| \leq \|g\|_q$.

Es ist nicht schwer zu sehen, dass

$$\|\varphi_g\| = \|g\|_q \tag{7.38}$$

(vgl. Satz 3.3.11). Man kann sogar zeigen, dass jede stetige Linearform von dieser Form ist.

Satz 7.4.1. *Sei* $1 < p < \infty$, $\frac{1}{8} + \frac{1}{q} = 1$. *Die Abbildung*

$$g \mapsto \varphi_g : L^q(\Omega) \to (L^p(\Omega))'$$

ist eine isometrischer Isomorphismus.

Man kann also kurz schreiben

$$(L^p(\Omega))' = L^q(\Omega) \quad \text{wobei}$$

$1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Genau wie in Korollar 3.3.12 erhält man als unmittelbare Folgerung:

Korollar 7.4.2. *Der Raum* $L^p(\Omega)$ *ist reflexiv, falls* $1 < p < \infty$.

Als nächstes beschreiben wir den Dualraum von $L^1(\Omega)$. Sei $g \in L^\infty(\Omega)$. Dann definiert

$$\varphi_g(f) = \int\limits_\Omega fg d\mu$$

eine stetige Linearform auf $L^1(\Omega)$ und $\|\varphi_g\| = \|g\|_\infty$.

Definition 7.4.3. *Der Maßraum* (Ω, Σ, μ) *heißt* σ *-endlich, falls es* $A_n \in \Sigma$ *gibt, so dass* $\mu(A_n) < \infty$ *und* $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega$.

Satz 7.4.4. *Ist* (Ω, Σ, μ) σ *-endlich, so ist*

$$\varphi : L^1(\Omega) \to L^\infty(\Omega) \ , \ g \mapsto \varphi_g$$

ein isometrischer Isomorphismus.

Wieder kann man kurz schreiben

$$L^1(\Omega)' = L^\infty(\Omega) \ .$$

Ein wichtiges Beispiel liefern offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$.

Beispiel 7.4.5. *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* λ *das Lebesguemaß. Dann ist* $L^p(\Omega)$ *ein separabler Banachraum. Insbesondere besitzt also* $L^2(\Omega)$ *eine abzählbare Orthonormalbasis.*

Literaturverzeichnis

[ABHN] W. Arendt, C. Batty, M. Hieber, F. Neubrander: *Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems*, Birkhäuser-Monographs in Mathematics. Basel (2001).

[Al] H.-G. Alt: *Lineare Funktionalanalysis*. Springer Berlin 1999.

[Au] J. P. Aubin: *Initiation à l'analyse appliquée*. Masson, Paris 1994.

[Ba] R. G. Bartle: *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. John Wiley, New York 1966.

[Br] H. Brezis: *Analyse fonctionelle. Théorie et applications.* Masson, Paris 1987.

[GM] W. T. Gowers, B. Maurey: *Banach spaces with small spaces of operators*. Math. Ann. **307** (1997), 543–568.

[LT] J. Lindenstrauss, L. Tzafiri: *Classical Banach Space Vol. I and II*. Springer Berlin 1977, 1979.

[Ru] W. Rudin: *Functional Analysis.* Mc Graw Hill 1991.

[W] D. Werner: *Funktionalanalysis.* Springer Berlin 1995.

[Ze1] E. Zeidler: *Applied Functional Analysis. Applications to Mathematical Physics*. Springer, **108**, 1995.

[Ze2] E. Zeidler: *Applied Functionalanalysis. Main Principles and their Applications*. Springer, **109**, 1995.

Das Buch [W] von D. Werner gibt eine ausgezeichnete Einführung in die Funktionalanalysis. Anwendungen findet man in [Al], [Br], [Ze1], [Ze2]. Ökonomische Modelle werden in [Au] behandelt.