Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

L'holomorphie du semi-groupe engendré par le laplacien Dirichlet sur $L^1(\Omega)$

Wolfgang Arendt et Charles J. K. Batty

Résumé — On montre que le laplacien avec conditions aux limites de Dirichlet engendre un semi-groupe holomorphe sur $L^1(\Omega)$ pour Ω un ouvert quelconque dans $\mathbb{R}^N$.

Holomorphy of the semigroup generated by the Dirichlet Laplacian on $L^1(\Omega)$

Abstract — *It is shown that the Laplacian with Dirichlet boundary conditions generates a holomorphic semigroup on* $L^1(\Omega)$ *where* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *is an arbitrary open subset of* $\mathbb{R}^N$.

Abridged English Version — Let $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ be open. There are two natural definitions of the Laplacian on $L^2(\Omega)$ with Dirichlet boundary conditions:

(*a*) The **pseudo-Dirichlet Laplacian** $\Delta_{\Omega, 2}$ is associated with the form a on $L^2(\Omega)$ given by

$$a(f, g) = \int_\Omega \nabla f \nabla g$$

with domain $D(a) = \{f \in L^2(\Omega) : \tilde{f} \in H^1(\mathbb{R}^N)$ (where $\tilde{f}$ denotes the function f extended by 0 on $\mathbb{R}^N$).

(*b*) The **Dirichlet Laplacian** $\Delta^d_{\Omega, 2}$ is associated with the restriction a^d of a to $H^1_0(\Omega)$. The operators $\Delta_{\Omega, 2}$ and $\Delta^d_{\Omega, 2}$ generate C_0-semigroups $S_{\Omega, 2} = (S_{\Omega, 2}(t))_{t \geqq 0}$ and $S^d_{\Omega, 2}$ on $L^2(\Omega)$. Moreover there exist C_0-semigroups $S_{\Omega, p}$ and $S^d_{\Omega, p}$ on $L^p(\Omega)$ $(1 \leqq p < \infty,\ p \neq 2)$ such that

$$S_{\Omega, p}(t) f = S_{\Omega, p}(t) f \qquad \text{and} \qquad S^d_{\Omega, p}(t) f = S^d_{\Omega, q}(t) f$$

$(t \geqq 0)$ for $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ where $1 \leqq p, q < \infty$. We denote by $\Delta_{\Omega, p}$ and $\Delta^d_{\Omega, p}$ the generator of $S_{\Omega, p}$ and $S^d_{\Omega, p}$, resp. Our aim is to prove the following:

Theorem. — *The* C_0*-semigroups* $S_{\Omega, 1}$ *and* $S^d_{\Omega, 1}$ *are holomorphic.*

If Ω is regular, this has been proved by Amann [1] (who also considers different boundary conditions). Here an elementary proof is given for arbitrary open subsets Ω of $\mathbb{R}^N$. It is based on an approximation by Schrödinger semigroups for which an argument of Kato [6] can be used.

By $G_p = (G_p(t))_{t \geqq 0}$ we denote the Gaussian semigroup on $L^p(\mathbb{R}^N)$ and by Δ_p its generator. Since G_1 is holomorphic there exists a constant $M \geqq 0$ such that

(6) $$\| \lambda R(\lambda, \Delta_1) \| \leqq M \qquad (\operatorname{Re} \lambda > 0).$$

An argument due to Kato [6] shows that

(7) $$\| \lambda R(\lambda, \Delta_1 - V) \| \leqq 2M \qquad (\operatorname{Re} \lambda > 0)$$

whenever $0 \leqq V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Note présentée par Haïm Brezis.

0764-4442/92/03150031 $ 2.00

Let $A_{p,k}:=\Delta_p - k\,1_{\Omega^c}\,(k\in\mathbb{N})$, $1\leq p<\infty$. Then

$$R(\lambda, \Delta_{\Omega,p})f=\lim_{k\to\infty} R(\lambda, A_{p,k})f \qquad (\operatorname{Re}\lambda>0) \tag{2}$$

for $f\in L^p(\Omega)$. For $p=2$ this follows by a theorem on monotone convergence for forms (*see* [4], Theorem 4.32), and for other $p\in[1, \infty]$, from this by interpolation. Now it follows from (2) and (7) that

$$\|\lambda R(\lambda, \Delta_{\Omega,1})\|\leqq 2M \qquad (\operatorname{Re}\lambda>0) \tag{8}$$

i.e. $\Delta_{\Omega,1}$ generates a bounded holomorphic C_0-semigroup.

To prove the result for the Dirichlet Laplacian let $\Omega_n\subset\Omega$ be open, relatively compact such that $\bar\Omega_n\subset\Omega_{n+1}$ and $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\Omega_n=\Omega$. Then

$$\lim_{n\to\infty} R(\lambda, \Delta_{\Omega_n,p})f=R(\lambda, \Delta^d_{\Omega,p})f \qquad (\operatorname{Re}\lambda>0) \tag{4}$$

for $f\in L^p(\Omega)$. So one obtains from (8),

$$\|\lambda R(\lambda, \Delta^d_{\Omega,1})\|\leqq 2M \qquad (\operatorname{Re}\lambda>0) \tag{9}$$

by letting $n\to\infty$. This proves holomorphy of $S^d_{\Omega,d}$.

---

1. Introduction. — Soit $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ ouvert. Il y a deux définitions naturelles du laplacien sur $L^2(\Omega)$ avec conditions aux limites 0 :

(*a*) Le **laplacien pseudo-Dirichlet** $\Delta_{\Omega,2}$ est associé à la forme a sur $L^2(\Omega)$ définie par

$$a(f, g)=\int_\Omega \nabla f\,\nabla g$$

de domaine $D(a)=\{f\in L^2(\Omega): \tilde f\in H^1(\mathbb{R}^N)\}$ (où $\tilde f$ désigne le prolongement par 0 de f). Donc

$$D(\Delta_{\Omega,2})=\{u\in D(a): \exists\, v\in L^2(\Omega),\ a(u, v)=(-v\,|\,\varphi)_{L^2},\ \forall\,\varphi\in D(a)\}$$
$$\Delta_{\Omega,2}\,u=v.$$

(*b*) Le **laplacien Dirichlet** $\Delta^d_{\Omega,2}$ est associé à la restriction a^d de a à $H^1_0(\Omega)$.

En général, ces opérateurs sont distincts, mais ils coïncident si Ω est de classe C^1 (grâce à [3], Prop. IX.18 et Remarque 21, p. 172, 173). Les opérateurs $\Delta_{\Omega,2}$ et $\Delta^d_{\Omega,2}$ sont auto-adjoints et forme-négatifs, donc ils engendrent des semi-groupes continus $S_{\Omega,2}=(S_{\Omega,2}(t))_{t\geq 0}$ et $S^d_{\Omega,2}$ sur $L^2(\Omega)$. On voit facilement à l'aide du critère de Beurling-Deny [5], mais aussi par la méthode présentée ici) qu'il existe des semi-groupes continus $S_{\Omega,p}$ et $S^d_{\Omega,p}$ sur $L^p(\Omega)$, $1\leqq p<\infty$, $p\neq 2$, tels que

$$S_{\Omega,p}(t)f=S_{\Omega,q}(t)f \qquad \text{et} \qquad S^d_{\Omega,p}(t)f=S^d_{\Omega,q}(t)f$$

($t\geqq 0$) pour $f\in L^p(\Omega)\cap L^q(\Omega)$ avec $1\leqq p, q<\infty$. On désigne par $\Delta_{\Omega,p}$ et $\Delta^d_{\Omega,p}$ les générateurs de $S_{\Omega,p}$ (resp. $S^d_{\Omega,p}$). Notre but est de démontrer le théorème suivant :

Théorème. — *Les semi-groupes* $S_{\Omega,p}$ *et* $S^d_{\Omega,p}$ *sont holomorphes bornés* ($1\leqq p<\infty$).

Pour $1<p<\infty$, ceci est une conséquence directe du théorème d'interpolation de Stein (*voir* [5]), mais l'argument ne s'étend pas à $p=1$. Si Ω est régulier, l'holomorphie de $S^d_{\Omega,1}$ a été démontrée par Amann [1] (qui considère également d'autres conditions aux limites).

Nous donnons une démonstration élémentaire pour $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ un ouvert quelconque. Elle est basée sur une approximation par des semi-groupes de Schrödinger sur $L^p(\mathbb{R}^N)$ qui permet d'utiliser un argument de T. Kato [6]. Dans l'article [2] nous étudions cette méthode plus en détail et l'appliquons à des opérateurs plus généraux.

Remarque. — Un argument également simple a été donné par Lumer-Paquet ([7], [8]) pour démontrer l'holomorphie du semi-groupe engendré par le laplacien sur $C_0(\Omega)$ [à condition qu'il engendre un semi-groupe continu ce qui nécessite des hypothèses de régularité à Ω contrairement à la situation dans $L^1(\Omega)$].

2. Approximation du laplacien pseudo-Dirichlet. — Soit $1 \leqq p < \infty$. On désigne par Δ_p le laplacien dans $L^p(\mathbb{R}^N)$, générateur du semi-groupe de Gauss $G_p = (G_p(t))_{t \geqq 0}$. La fonction caractéristique de l'ensemble complémentaire Ω^c de Ω est notée 1_{Ω^c} qu'on voit également comme opérateur de multiplication $f \mapsto 1_{\Omega^c} \cdot f$ sur $L^p(\mathbb{R}^N)$. Ainsi, l'opérateur $A_{p,k} := \Delta_p - k\, 1_{\Omega^c}$ $(k \in \mathbb{N})$ engendre un semi-groupe continu $T_{p,k}$ sur $L^p(\mathbb{R}^N)$. Dans la suite nous identifions $L^p(\Omega)$ avec un sous-espace de $L^p(\mathbb{R}^N)$ en prolongeant les fonctions par 0. Pour $B \in \mathscr{L}(L^p(\Omega))$ on définit $\tilde{B} \in \mathscr{L}(L^p(\mathbb{R}^N))$ par $\tilde{B} f = (B(1_\Omega . f))^\sim$.

D'après le théorème de convergence monotone pour les formes positives [4], Theorem 4.32 (*voir* aussi [10], theorem S.14, p. 373) on a $\lim_{k \to \infty} R(\lambda, A_{2,k}) = \tilde{R}(\lambda, \Delta_{\Omega, 2})$ $(\lambda > 0)$. Comme pour $\lambda > 0$, $R(\lambda, A_{p,k}) \geqq 0$ et

$$R(\lambda, A_{p,k}) - R(\lambda, A_{p,k+1}) = R(\lambda, A_{p,k})\, 1_{\Omega^c} R(\lambda, A_{p,k+1}) \geqq 0, \tag{1}$$

$R(\lambda, A_{p,k})$ converge fortement $(k \to \infty)$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$. Puisque

$$\lim_{k \to \infty} R(\lambda, A_{p,k}) = \tilde{R}(\lambda, \Delta_{\Omega, p}) \qquad \text{pour} \quad p = 2,$$

ceci reste vrai pour $1 \leqq p < \infty$ grâce à la propriété d'interpolation.

(1) implique que $0 \leqq T_{p,k+1}(t) \leqq T_{p,k}(t)$. Donc grâce au théorème de Beppo Levi

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} \tilde{S}_{\Omega, p}(t)\, dt = \tilde{R}(\lambda, \Delta_{\Omega, p}) = \lim_{k \to \infty} R(\lambda, A_{p,k})$$

$$= \lim_{k \to \infty} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_{p,k}(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} (\lim_{k \to \infty} T_{p,k}(t)\, dt)\, dt \qquad \text{pour} \quad \lambda > 0.$$

Le théorème d'unicité pour les transformées de Laplace implique que

$$\tilde{S}_{\Omega, p}(t) = \lim_{k \to \infty} T_{p,k}(t)$$

fortement. Maintenant on peut déduire du théorème de Lebesgue que

$$\tilde{R}(\lambda, \Delta_{\Omega, p}) = \lim_{k \to \infty} R(\lambda, A_{p,k}) \text{ fortement pour } \operatorname{Re} \lambda > 0. \tag{2}$$

C'est cette approximation qui sera utile au paragraphe 3. Notons en passant que ce raisonnement montre également que pour un autre ouvert $\omega \subset \Omega$ on a

$$0 \leqq \tilde{S}_{\omega, p}(t) \leqq \tilde{S}_{\Omega, p}(t) \leqq G_p(t) \qquad (t \geqq 0). \tag{3}$$

3. Approximation du laplacien-Dirichlet. — Soient $\Omega_n \subset \mathbb{R}^N$ des ouverts, relativement compacts tels que $\bar{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1} \subset \Omega$ et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n = \Omega$. D'après le théorème de convergence monotone [10], Theorem S.16, p. 373 ou [5], Theorem 1.2.3 (avec généralisation canonique aux formes positives de domaine non-dense) on a $\lim_{n \to \infty} \tilde{R}(\lambda, \Delta_{\Omega_n, p}) = \tilde{R}(\lambda, \Delta_{\Omega, p})$ fortement pour $\lambda > 0$; d'abord pour $p = 2$, ensuite pour p arbitraire grâce à la propriété d'interpolation et la monotonie (3). On en déduit comme au paragraphe 2 que

$\lim_{n\to\infty} \tilde{S}(t)_{\Omega_n,p} = \tilde{S}(t)^d_{\Omega,p}$ fortement. Le théorème de Lebesgue entraîne que

(4) $$\lim_{n\to\infty} R(\lambda, \Delta_{\Omega_n,p}) = R(\lambda, \Delta^d_{\Omega,p}) \qquad \text{pour} \quad \operatorname{Re}\lambda>0.$$

Notons également que nos arguments montrent que

(5) $$0 \leqq S^d_{\omega,p}(t) \leqq S^d_{\Omega,p}(t) \leqq S_{\Omega,p}(t) \leqq G_p(t) \qquad (t \geqq 0)$$

si $\omega \subset \Omega$ est ouvert.

4. L'holomorphie. — Comme G_1 est un semi-groupe holomorphe borné il existe $M \geqq 0$ tel que

(6) $$\| \lambda R(\lambda, \Delta_1) \| \leqq M \qquad (\operatorname{Re}\lambda>0).$$

L'argument suivant est dû à T. Kato [6]. Soit $0 \leqq V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Alors

(7) $$\| \lambda R(\lambda, \Delta_1 - V) \| \leqq 2M \qquad (\operatorname{Re}\lambda>0).$$

En effet, grâce à la dissipativité de Δ_1 on a

(8) $$\operatorname{Re}\langle (\operatorname{sign}\bar{f})\Delta_1 f, \mathbf{1}\rangle \leqq 0 \qquad (f\in D(\Delta_1))$$

où $\operatorname{sign}\bar{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ satisfait $(\operatorname{sign}\bar{f}).f = |f|$.

Par conséquent, pour $f \in D(\Delta_1)$, $\operatorname{Re}\lambda>0$,

$$\begin{aligned}\|(\lambda-\Delta_1+V)f\|_{L^1} &\geqq \operatorname{Re}\langle(\operatorname{sign}\bar{f})(\lambda-\Delta_1+V)f, \mathbf{1}\rangle \\ &= \langle \operatorname{Re}\lambda|f| + V|f|, \mathbf{1}\rangle - \operatorname{Re}\langle(\operatorname{sign}\bar{f})\Delta_1 f, \mathbf{1}\rangle \\ &\geqq \langle V|f|, \mathbf{1}\rangle = \|Vf\|_{L^1}.\end{aligned}$$

Grâce à (6) on en déduit

$$\begin{aligned}|\lambda| \cdot \|f\|_{L^1} \leqq M\|(\lambda-\Delta_1)f\|_{L^1} &\leqq M(\|(\lambda-\Delta_1+V)f\|_{L^1} + \|Vf\|_{L^1}) \\ &\leqq 2M\|(\lambda-\Delta_1+V)f\|_{L^1} \qquad (\operatorname{Re}\lambda>0), f\in D(\Delta_1)).\end{aligned}$$

Ceci prouve l'estimation (7).

En choisissant $V = k\,1_{\Omega^c}$, grâce à (2), passage à la limite dans (7) donne

(8) $$\|\lambda R(\lambda, \Delta_{\Omega,1})\| \leqq 2M \qquad (\operatorname{Re}\lambda>0).$$

Par la seconde approximation (4) on obtient

(9) $$\|\lambda R(\lambda, \Delta^d_{\Omega,1})\| \leqq 2M \qquad (\operatorname{Re}\lambda>0).$$

Ces estimations montrent que $S_{\Omega,1}$ et $S^d_{\Omega,1}$ sont des semi-groupes holomorphes bornés (*voir* [9], A-II Theorem 1.14). Comme $\Delta_{\Omega,2}$ et $\Delta^d_{\Omega,2}$ sont auto-adjoints, on déduit de (8) et (9) grâce au théorème de Riesz-Thorin

(10) $$\|\lambda R(\lambda, \Delta_{\Omega,p})\| \leqq 2M, \quad \|\lambda R(\lambda, \Delta^d_{\Omega,p})\| \leqq 2M \qquad (\operatorname{Re}\lambda>0)$$

pour $1 \leqq p < \infty$ et le théorème est démontré.

Remarque. — Les majorations (3) et (5) par le semi-groupe de Gauss montrent directement la propriété d'interpolation de $S_{\Omega,2}$ et $S^d_{\Omega,2}$ sans faire appel au critère de Beurling-Deny.

Note remise le 27 janvier 1992, acceptée le 26 février 1992.

Références bibliographiques

[1] H. Amann, Dual semigroups and second order linear elliptic boundary value problems, *Israel J. Math.*, 45, 1983, p. 225-254.

[2] W. Arendt et C. J. K. Batty, *Absorption semigroups and Dirichlet boundary conditions*, Preprint.

[3] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle*, Masson, Paris, 1983.

[4] E. B. DAVIES, *One-Parameter Semigroups*, Academic Press, London, 1980.

[5] E. B. DAVIES, *Heat Kernels and Spectral Theory*, Cambridge University Press, 1989.

[6] T. KATO, L^p-theory of Schrödinger operators, in *Aspects of Positivity in Functional Analysis*, R. NAGEL, U. SCHLOTTERBEEK et M. WOLFF éd., North Holland, Amsterdam, 1986, p. 63-78.

[7] G. LUMER et PAQUET, Semi-groupes holomorphes et équations d'évolution, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 284, série A, 1977, p. 240-247.

[8] G. LUMER et PAQUET, Semi-groupes holomorphes, produit tensoriel de semi-groupes et équations d'évolution, *Séminaire Théorie du Potentiel*, Université de Paris-VI, 21 oct. 1978.

[9] R. NAGEL éd., One-Parameter Semigroups of Positive Operators, *Springer Lecture Notes in Math.*, n° 1184, Berlin, 1986.

[10] M. REED et B. SIMON, *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis*, Academic Press, New York, 1980.

Équipe de Mathématiques, U.R.A. C.N.R.S. n° 741,
Université de Franche-Comté, 25030 *Besançon Cedex ;*

C. B. : Adresse permanente : *St-John's College*, *Oxford OX*1 3*JP*, *Angleterre.*