ulm university universität uulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Sommersemester 2015

Übungsblatt 1

Gewöhnliche Differenzialgleichungen

Abgabe ist zu dritt am 23.4.2015 um 12**st** in der Übung.[1]

Jedes der Übungsblätter wird voraussichtlich 40 erreichbare Punkte beinhalten. Sie finden immer eine Version mit und eine ohne Hinweise online. Diese verraten aber teilweise schon viel und können Ihnen den Spaß an der Knobelei verderben.

Aufgabe 1 (*Anwenden der bisherigen Lösungsmethoden*) (5+5)
Finden Sie (I ist ein von Ihnen wählbares offenes Intervall mit $0 \in I$)

(a) alle Lösungen von $\dot{u}(t) + tu(t) + t^3 = 0$ für $t \in \mathbb{R}$.
(b) eine Lösung $u\colon I \to \mathbb{R}$ von $\dot{u}(t) = tu(t)^2 + t$ für $t \in I$ mit $u(0) = 4$.

Aufgabe 2 (*Reduktion der Ordnung von linearen Differenzialgleichungen am Beispiel*) (5+5)
Man bestimme alle Lösungen der folgenden Differenzialgleichungen in $C^2(\mathbb{R})$. Achten Sie dabei auch auf einen vollständigen Beweis. Die Ideen kommen alle aus der Linearen Algebra. Hilfreiche Bemerkungen finden Sie in den Hinweisen, falls Sie keinen Ansatz finden.

(a) $u''(t) - u(t) = 0$
(b) $u''(t) - u(t) = e^{2t}$

Aufgabe 3 (*Modellbildung*) (4+6)
In eine zylindrischen Wanne mit der Grundfläche $F = 1\,\mathrm{m}^2$ fließe durch einen Schlauch mit Querschnitt $E = 2\,\mathrm{cm}^2$ Wasser mit konstanter Geschwindigkeit $v_{\text{in}} = 2\,\mathrm{m/s}$ hinein. Die Wanne hat auf der anderen Seite[2] einen Abfluss am Boden. Die Fläche aus der Wasser fließen kann beträgt $A = 2\,\mathrm{cm}^2$. Der Wasserstand in der Wanne zum Zeitpunkt $t = 0$ sei mit $h_0 \geq 0$ bezeichnet.

(a) Man leite sich ein Modell in Form eines AWP für den Wasserstand $h(t)$ zum Zeitpunkt t her.
(b) Es sei $h\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ (Sie dürfen annehmen, dass diese eindeutig ist) die Lösung für das Modell. Was passiert mit dem Wasserstand für $t \to \infty$.

Aufgabe 4 (*Neustart von Lösungen*) (10)
Es seien $a < b < c$ und eine stetige Funktion $f\colon (a,c)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben. Weiter seien $y_1\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ und $y_2\colon (b,c) \to \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Lösungen von $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ für t im jeweiligen Definitionsbereich. Es gelte

$$k := \lim_{t\to b-} y_1(t) = \lim_{t\to b+} y_2(t),$$

wobei wir voraussetzen, dass beide Limiten existieren. Man zeige, dass dann

$$y(t) = \begin{cases} y_1(t) & \text{, für } t \in (a,b) \\ k & \text{, für } t = b \\ y_2(t) & \text{, für } t \in (b,c) \end{cases}$$

eine stetig differenzierbare Lösung von $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ für $t \in (a,c)$ ist.

---

[1] Achten Sie auch darauf, dass sich jeder intensiv mit jeder Aufgabe beschäftigt und Sie bei Problemen diskutieren. Das ist die beste Vorbereitung für die Klausur! Es ist auf jeden Fall nicht sinnvoll, wenn einer die Arbeit macht.

[2] So können wir annehmen, dass Geschwindigkeit am Abfluss nur durch den Druck des Wassers zustande kommt.