ulm university universität uulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Sommersemester 2015

Übungsblatt 2

Gewöhnliche Differenzialgleichungen

Abgabe ist zu dritt am 30.4.2015 um 12**st** in der Übung.[1]

Aufgabe 1 (*exakte Differenzialgleichungen*) (5+5)
Man gebe jeweils ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ an und finde eine Lösung $y\colon I \to \mathbb{R}$ mit $0 \in I$ der folgenden AWPe:

(a) $(t + y(t))^{-1}\dot{y}(t) + (t + y(t))^{-1} + 1 = 0$ mit $y(0) = -1$
(b) $y(t)(t^2 + 1)\dot{y}(t) + (t^2 + 1)^{-1} + ty(t)^2 = 0$ mit $y(0) = 1$

Aufgabe 2 (*Anwendung von Picard-Lindelöf*) (5+5)
Man zeige, dass folgende AWPe eine eindeutige lokale Lösung besitzen:

(a) $\dot{y_1}(t) = e^{ty_1(t)} + t^2 y_2(t)^4 + 3t$ sowie $\dot{y_2}(t) = \sin(ty_1(t))y_2(t) + 3t^2$ und $y_1(0) = x_1$, $y_2(0) = x_2$
(b) $\dot{y}(t) = \sqrt{|t-1|}\sin|y(t)| + e^{4ty(t)}$ mit $y(0) = y_0$

Aufgabe 3 (*Lokale Existenz und Eindeutigkeit*) (5+5)
Man gebe alle Anfangswerte $y_0 \in \Omega$ an für die das Problem $\dot{y}(t) = f(y(t))$ mit $y(0) = y_0$ eine eindeutige lokale Lösung $y\colon [0, T) \to \Omega$ (für ein $T > 0$) besitzt und begründe die Behauptung. Dabei sei $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ wie folgt:

(a) $f(y) = a - b\sqrt{y}$ mit $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ und $\Omega = [0, \infty)$ (vgl. Aufgabe 3 von Blatt 1)
(b) $f(y) = \sqrt{|1-y|}$ mit $\Omega = (-\infty, \infty)$

Aufgabe 4 (*Verhalten von Lösungen am Rand des Existenzintervalls*) (5*+5+5)
Wir wollen untersuchen, was am Rand eines Existenzintervalls passieren kann.

(a) Es sei $y\colon [0, \infty) \to D$ eine beschränkte[2] globale C^1-Lösung von $\dot{y}(t) = f(y(t))$ für ein stetiges $f\colon D \to \mathbb{R}^d$ mit $D \subset \mathbb{R}^d$ abgeschlossen. Man finde ein solches Beispiel derart, dass für jede Folge (t_n) mit $t_n \to \infty$ und $y(t_n) \to y_*$ für ein $y_* \in D$ stets $f(y_*) \neq 0$ folgt.
(b) Setzt man in (a) zusätzlich die Existenz von

$$y_* = \lim_{t\to\infty} y(t)$$

voraus, dann gilt automatisch $f(y_*) = 0$. Man beweise dies.
(c) Es sei $y\colon [0, t_0) \to \mathbb{R}^d$ eine beschränkte[3] C^1-Lösung von $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ für ein $t_0 \in (0, \infty)$ und ein stetiges $f\colon D \to \mathbb{R}^d$ mit $D \subset [0, \infty) \times \mathbb{R}^d$ abgeschlossen. Man zeige, dass dann

$$y_0 = \lim_{t\to t_0-} y(t)$$

existiert und $(t_0, y_0) \in D$ gilt.

[1] Achten Sie auch darauf, dass sich jeder intensiv mit jeder Aufgabe beschäftigt und Sie bei Problemen diskutieren. Das ist die beste Vorbereitung für die Klausur! Es ist auf jeden Fall nicht sinnvoll, wenn einer die Arbeit macht.
[2] d.h. es gibt eine Konstante M mit $|y(t)| \leq M$ für alle $t \geq 0$.
[3] d.h. es gibt eine Konstante M mit $|y(t)| \leq M$ für alle $t \in [0, t_0)$.