Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Sommersemester 2015

Übungsblatt 4

Gewöhnliche Differenzialgleichungen

Abgabe ist zu dritt am 13.5.2015 um 12**st** in der **Vorlesung**. Besprechung ist am 20.5.2015.[1]

Aufgabe 1 (*gedämpfte Schwingung und Resonanzkatastrophe*[2]) (5+5)
Eine gedämpfte Schwingung[3] kann unter geeigneten Annahmen durch die DGL

$$y''(t) + 2\gamma y'(t) + \omega_0^2 y(t) = 0$$

modelliert werden ($\gamma \in \mathbb{R}$, $\omega_0 \geq 0$).

(a) Berechnen Sie die reellen Lösungen der DGL.
(b) Wir legen nun eine äußere periodische Kraft an[4]. Diese Situation modellieren wir durch ($\omega \geq 0$)

$$y''(t) + 2\gamma y'(t) + \omega_0^2 y(t) = \sin(\omega t).$$

Man bestimme im Fall $\gamma \in (0, \omega_0)$ die asymptotische Auslenkung

$$\limsup_{t\to\infty} |y(t)|$$

der Lösung. Für welche ω ist diese maximal (für feste ω_0 und γ)?

Aufgabe 2 (*Eine Gleichung dritter Ordnung*) (5+5)
Wir wollen alle reelle Lösungen der folgenden DGL bestimmen:

$$y'''(t) - y''(t) + y'(t) - y(t) = 0$$

(a) Man zeige, dass die globalen Lösungen der DGL einen Vektorraum der Dimension 3 bilden.
(b) Man bestimme die Menge aller Lösungen der DGL (Achten Sie auf vollständige Argumentation).

Aufgabe 3 (*globale Lösungen und asymptotisches Verhalten*) (10+5*)
Wir betrachten das AWP

$$\dot{y}(t) = y(t) + \sin y(t) + 1 - y(t)^3,\ y(0) = y_0$$

(a) Man begründe, dass man stets eine eindeutige globale Lösung $y\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ des AWPs findet.
(b) Man beweise, dass $y(t)$ für $t \to \infty$ konvergiert und, dass der Grenzwert y_* die Gleichung $y_* + \sin y_* + 1 - y_*^3 = 0$ erfüllt.

Aufgabe 4 (*Multiple-Choice*) (10)
Man entscheide jeweils, welche der folgenden Antwortmöglichkeiten richtig bzw. falsch sind (+1 Punkt, falls die korrekte Antwort gegeben wurde; andernfalls −1 Punkt) und gebe jeweils (ein vollständiger Beweis ist nicht nötig) eine kurze Begründung/Gegenbeispiel/Beweislücke (+1 Punkt). Was genau zu tun ist, ist hinter der Aussage in Klammern notiert. Die Gesammtpunktzahl wird auf 0 aufgerundet, sollte diese negativ sein.

[1] Achten Sie auch darauf, dass sich jeder intensiv mit jeder Aufgabe beschäftigt und Sie bei Problemen diskutieren. Das ist die beste Vorbereitung für die Klausur! Es ist auf jeden Fall nicht sinnvoll, wenn einer die Arbeit macht.
[2] Animationen finden sich online auf der Vorlesungsseite.
[3] Stark vereinfacht kann man hier die Vertikalauslenkungen $y(t)$ einer Brücke modellieren.
[4] Zum Beispiel durch Soldaten, die im Gleichschritt über die Brücke laufen. Dies ist zum Beispiel der Broughton Suspension Bridge zum Verhängnis geworden.

Bitte wenden!

(a) Die DGL $y''(t) + y(t) = 0$ hat nur periodische Lösungen.
□ richtig (kurze Begründung). □ falsch (Gegenbeispiel).

(b) Die DGL $y''(t) - y(t) = 0$ hat nur Lösungen der Form $y(t) = ce^{\lambda t}$ für $c, \lambda \in \mathbb{R}$.
□ richtig (kurze Beweisskizze). □ falsch (Gegenbeispiel).

(c) Das AWP $y''(t) = |\sin y(t)| + (1 + y'(t)^2)^{-1}$ mit $y(0) = y_0, y'(0) = v_0$ hat stets eine eindeutige globale Lösung.
□ richtig (Referenz der zum Beweis nötigen Sätze angeben). □ falsch (Gegenbeispiel).

(d) Eine beschränkte globale Lösung $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ einer DGL der Form $y''(t) = f(y(t), y'(t))$ für $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar konvergiert für $t \to \infty$.
□ richtig (Beweisskizze). □ falsch (Gegenbeispiel).

(e) Wir haben berechnet, dass $y(t)(t^2 + 1)\dot{y}(t) + (t^2 + 1)^{-1} + ty(t)^2 = 0$ mit $y(0) = 1$ keine globale Lösung hat. Weil die DGL überall definiert ist, muss die Norm der Lösung am Rand des maximalen Existenzintervalls explodieren. Die Begründung ist
□ korrekt (Aussage des verwendeten Satzes). □ falsch (Beweislücke finden).