Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Sommersemester 2015

Erste Klausur

Gewöhnliche Differenzialgleichungen

am 20.6.2015 um 10 Uhr. Bearbeitungszeit beträgt zwei Stunden.

Achten Sie auf vollständige, saubere und schlüssige Argumentation! 100% entsprechen 100 Punkten.

Aufgabe 1 (*Maximale Lösungen explizit berechnen*) (10+10)
Man gebe jeweils eine maximale Lösung der folgenden Anfangswertprobleme an. Sie müssen nicht zeigen, dass die Lösung eindeutig ist, aber nachweisen, dass ihr Ergebnis eine maximale Lösung ist.

(a) $3ty(t)^2\dot{y}(t) + y(t)^3 + t^2 = 0$ mit $y(1) = 1$.
(b) $\dot{y}(t) = |y(t) + 1| + 1$ mit $y(0) = 0$.

Aufgabe 2 (*Lineare Differenzialgleichungssysteme*) (20)
Man gebe die Menge aller reellen Lösungen von

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_1(t) + 3y_3(t) \\ \dot{y}_2(t) = y_2(t) + y_4(t) \\ \dot{y}_3(t) = -y_1(t) + 3y_3(t) \\ \dot{y}_4(t) = y_4(t) \\ \dot{y}_5(t) = y_2(t) + y_5(t) \end{cases}$$

in parametrisierter Form an.

Aufgabe 3 (*Existenz und Eindeutigkeit maximaler Lösungen*) (10+10+10)
Man diskutiere, ob die folgenden Anfangswertprobleme maximale Lösungen besitzen und ob diese eindeutig sind.

(a) $\dot{y}(t) = \sqrt{|t+1|}|\sin y(t)| + |t^2 + t + \cos(t)|$ und $y(0) = 0$
(b)
$$\begin{cases} y_1'''(t) = \sin y_1(t) + y_1''(t)y_2(t) + 1 \\ y_2'(t) = t\cos y_1'(t) + 2\sin y_2(t) + y_1'''(t) \\ y_1(0) = y_1'(0) = y_1''(0) = y_2(0) = 0 \end{cases}$$
(c) $\dot{y}(t) = e^t\sqrt[3]{y(t)}$ und $y(0) = 0$

Aufgabe 4 (*Globales Verhalten von Lösungen*) (10+10+10)

(a) Man beweise oder widerlege, dass $\dot{y}(t) = \sqrt{|t+1|}|\sin y(t)| + |t^2 + t + \cos(t)|$ mit $y(0) = y_0$ (mit $y_0 \in \mathbb{R}$ fest vorgegeben) eine globale Lösung besitzt (vgl Aufgabe 3 (a)).
(b) Es gibt eine eindeutige globale Lösung von $\dot{y}(t) = \cos y(t) + y(t)^2 - y(t)^3$ mit $y(0) = 0$ und diese ist beschränkt (dies müssen Sie nicht zeigen). Beweisen Sie, dass $y(t)$ für $t \to \infty$ gegen die kleinste positive Nullstelle von $f(x) = \cos x + x^2 - x^3$ konvergiert.
(c) Man beweise oder widerlege, dass $\dot{y}(t) = ty(t) - y(t)^2 + 2$ mit $y(0) = 0$ eine Lösung $y\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ besitzt.

Bitte wenden!

Aufgabe 5 (*Multiple-Choice*) (20)

Entscheiden Sie jeweils welche Aussage richtig und welche falsch ist. Geben Sie zudem eine Begründung ihrer Auswahl an (Beweis, Gegenbeispiel, etc.).

richtige Antwort	*+1 Punkt*
keine Antwort	*0 Punkte*
falsche Antwort	*-1 Punkt*
richtige Begründung	*+4 Punkte*

Die Geamtpunktzahl wird auf 0 Punkte aufgerundet sollte diese negativ sein.

(a) Das AWP $|\dot{y}(t)| = y(t)$ mit $y(0) = 1$ hat genau eine maximale Lösung.
☐ richtig ☐ falsch

(b) Das AWP $\dot{y}(t) = |y(t) + 1|$ mit $y(0) = 1$ hat genau eine maximale Lösung.
☐ richtig ☐ falsch

(c) Die DGL

$$2ty(t)\dot{y}(t) + t^2 + y(t) = 0$$

ist exakt.
☐ richtig ☐ falsch

(d) Die globalen Lösungen von

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) + y_2(t) + 2y_3(t) \\ y_2'(t) = y_1(t) - y_2(t) \\ y_3'(t) = y_1(t) - 2y_2(t) + y_3(t) \end{cases}$$

bilden einen Vektorraum der Dimension 3.
☐ richtig ☐ falsch

Wir wünschen viel Erfolg!