ulm university universität ulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Sommersemester 2015

Zweite Klausur

Gewöhnliche Differenzialgleichungen

am 2.9.2015 um 12 Uhr. Bearbeitungszeit beträgt zwei Stunden.

Achten Sie auf vollständige, saubere und schlüssige Argumentation! 100% entsprechen 100 Punkten.

Aufgabe 1 (*Maximale Lösungen explizit berechnen*) (10+10)
Man gebe jeweils eine maximale Lösung der folgenden Anfangswertprobleme an. Sie müssen nicht zeigen, dass die Lösung eindeutig ist, aber nachweisen, dass ihr Ergebnis eine maximale Lösung ist.

(a) $\dot{y}(t) = 2ty^3(t) + |y(t)|^3$ mit $y(0) = -1/2$.
(b) $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = t$ mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = 0$.

Aufgabe 2 (*Lineare Differenzialgleichungssysteme*) (20)
Man gebe die Menge aller reellen Lösungen von

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_1(t) - y_5(t) \\ \dot{y}_2(t) = y_2(t) + y_4(t) \\ \dot{y}_3(t) = y_2(t) + y_4(t) + 2y_3(t) \\ \dot{y}_4(t) = y_2(t) + y_4(t) \\ \dot{y}_5(t) = y_1(t) + y_5(t) \end{cases}$$

in parametrisierter Form an.

Aufgabe 3 (*Existenz und Eindeutigkeit maximaler Lösungen*) (10+10+10)
Man diskutiere, ob die folgenden Anfangswertprobleme maximale Lösungen besitzen und ob diese eindeutig sind.

(a) $\dot{y}(t) = \sqrt{|t|}\exp|y(t)| + 1 + \sqrt{|y(t)|}\sin y(t) + t^2$ und $y(0) = 0$
(b)

$$\begin{cases} y_1''(t) = \cos y_1(t) + y_1'(t)y_2(t) + e^t \\ y_2''(t) = \sqrt{t+1}\,y_1'(t) + 2\sin y_2'(t) \\ y_1(0) = y_1'(0) = y_2(0) = y_2'(0) = 0 \end{cases}$$

(c) $\dot{y}(t) = -t\sqrt[3]{y(t)}$ und $y(0) = 0$

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (*Globales Verhalten von Lösungen*) (10+10+10)

(a) Man beweise oder widerlege, dass $\dot{y}(t) = t \sin y(t) + 1$ mit $y(0) = 0$ eine globale Lösung besitzt.

(b) Man beweise oder widerlege, dass $\dot{y}(t) = \sin y(t) + y(t)^2 + 2$ mit $y(0) = 1$ eine globale Lösung besitzt.

(c) Es sei $y\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differenzialgleichung $y''(t) = f(y(t), y'(t))$ für ein $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Weiter existiere[1]

$$y_* = \lim_{t\to\infty} y(t) \text{ und } \lim_{t\to\infty} y'(t).$$

Man zeige, dass dann $f(y_*, 0) = 0$ gilt.

Aufgabe 5 (*Multiple-Choice*) (20)

Entscheiden Sie jeweils welche Aussagen zutreffen. Geben Sie zudem eine Begründung ihrer Auswahl an (Beweis, Gegenbeispiel, Beispiel, etc.).

richtige Antwort	*+1 Punkt*
keine Antwort	*0 Punkte*
falsche Antwort	*-1 Punkt*
richtige Begründung	*+4 Punkte*

Die Geamtpunktzahl wird auf 0 Punkte aufgerundet, sollte diese negativ sein.

(a) Das AWP $\dot{y}(t) = \sqrt{|ty(t)|} + 1 + \sin y(t)$ mit $y(0) = 0$ hat mindestens eine maximale Lösung.
☐ richtig ☐ falsch

(b) Es gibt eine Differenzialgleichung der Form $\dot{y}(t) = f(y(t))$ mit der globalen Lösung $y(t) = \sin(t)$.
☐ richtig ☐ falsch

(c) Es gibt eine Differenzialgleichung der Form $\dot{y}(t) = f(y(t))$ mit der lokalen Lösung $y\colon (-1, 1) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $y(t) = \sin(t)$.
☐ richtig ☐ falsch

(d) Der Vektorraum aller globalen Lösungen von

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) + y_2(t) + 5y_3(t) \\ y_2''(t) = y_1(t) - 2y_2(t) + 5y_3(t) \\ y_3'(t) = y_1(t) + 3y_2'(t) - y_3(t) \end{cases}$$

hat die Dimension
☐ zwei. ☐ drei. ☐ vier.

[1] Die Existenz von

$$\lim_{t\to\infty} y'(t)$$

ist eigentlich nicht nötig. Ohne diese zusätzliche Voraussetzung wäre die Aussage aber relativ schwer zu beweisen.