Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Sommersemester 2015

Lösungsvorschläge zur Probeklausur

Gewöhnliche Differenzialgleichungen

Die Bearbeitungszeit ist auf zwei Stunden angesetzt.[1]

Achten Sie auf vollständige, saubere und schlüssige Argumentation! Sie dürfen alle Aussagen aus der Vorlesung und der Übung benutzen. 100% entsprechen 100 Punkten.

Inhaltsverzeichnis

[1] Lösungen zu manchen Aufgaben werden im Tutorium besprochen. Welche der Aufgaben können Sie bis zum 29.5.2015 12 Uhr im Moodle mitentscheiden.

Aufgabe 1 (*maximale Lösungen explizit berechnen*) (10+10)
Man gebe jeweils eine maximale Lösung der folgenden Anfangswertprobleme an. Sie müssen nicht zeigen, dass die Lösung eindeutig ist, aber nachweisen, dass ihr Ergebnis eine maximale Lösung ist.

(a) $2e^t y(t)\dot{y}(t) + e^t y(t)^2 + t = 0$ mit $y(0) = -1$
(b) $\dot{y}(t) = (1+t^2)^{-1}y(t) + 2t - 1$ mit $y(0) = 0$

Lösung von Aufgabe 1:
ad (a): Das angegebene AWP ist eine eventuell eine exakte DGL, denn dieses liegt vor in der Form

$$q(t, y(t))\dot{y}(t) + p(t, y(t)) = 0 \text{ mit } y(0) = -1$$

mit $p(t, y) = e^t y^2 + t$ und $q(t, y) = 2e^t y$. Wir sollten also versuchen ein $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zu finden mit $\varphi_t = p$ und $\varphi_y = q$. Die zweite Gleichung gibt uns

$$\varphi(t, y) = e^t y^2 + c(t)$$

für eine Funktion $c(t)$ welche nicht von y abhängt. Nun betrachten wir die erste Gleichung und erhalten

$$c'(t) = t.$$

Damit ist

$$\varphi(t, y) = e^t y^2 + \frac{1}{2}t^2$$

eine solche Funktion und die DGL ist in der Tat exakt. Laut Vorlesung (was man aber auch sehr schnell sehen kann) erüllt dann jede Lösung die Gleichung

$$\varphi(t, y(t)) = c$$

für eine Konstante c. Wir lösen nun

$$e^t y^2(t) + \frac{1}{2}t^2 = c$$

nach $y(t)$ auf und erhalten damit

$$y(t) = \pm e^{-t/2}\sqrt{c - t^2/2}.$$

Nun ist es an der Zeit den AW einzusetzen. Wir erhalten

$$-1 = y(0) = \pm\sqrt{c}.$$

damit sollten wie $c = 1$ und das Vorzeichen -1 wählen. Die Lösung ist also gegeben durch

$$y(t) = -e^{-t/2}\sqrt{1 - t^2/2}.$$

Dies ist eine Lösung für $t \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Das Intervall $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ist in der Tat maximal, denn die Ableitung von y explodiert an den Grenzen. Deshalb kann die Funktion nicht weiter C^1-fortgesetzt werden.
ad (b): Die angegebene DGL ist eine inhomogene lineare DGL. Wir bestimmen zuerst die Lösungen des homogenen Teils. Dieser ist gegeben durch

$$\dot{y}_h(t) = (1+t^2)^{-1}y_h(t).$$

Die Lösungen sind geben durch

$$y_h(t) = ce^{\int (1+t^2)^{-1}\, dt} = ce^{\arctan(t)}$$

für eine Konstante c. Durch Variation der Konstanten (also durch den Ansatz $y(t) = c(t)e^{\arctan(t)}$) erhalten wir

$$c'(t) = (2t-1)e^{-\arctan(t)}.$$

Wir erhalten also (durch partielle Integration)

$$\begin{aligned}
c(t) &= \int (2t-1)e^{-\arctan(t)}\,dt = \int 2te^{-\arctan(t)}\,dt - \int e^{-\arctan(t)}\,dt \\
&= t^2e^{-\arctan(t)} + \int \frac{t^2}{t^2+1}e^{-\arctan(t)}\,dt - \int e^{-\arctan(t)}\,dt \\
&= t^2e^{-\arctan(t)} - \int \frac{-1}{t^2+1}e^{-\arctan(t)}\,dt = t^2e^{-\arctan(t)} + e^{-\arctan(t)} + d.
\end{aligned}$$

für eine Konstante d. Wir erhalten also

$$y(t) = t^2 + 1 + de^{\arctan(t)}.$$

Einsetzen des AW liefert

$$y(t) = t^2 + 1 - e^{\arctan(t)},$$

welches eine Lösung des AWPs für das Intervall $I = (-\infty, \infty)$ ist (natürlich maximal).

Aufgabe 2 (*Lineare Differenzialgleichungen*) (20)
Finden Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = -y_1(t) + y_2(t) + t \\ \dot{y}_2(t) = -3y_1(t) - y_2(t) \\ \dot{y}_3(t) = y_3(t) + 1 \\ \dot{y}_4(t) = y_3(t) + y_4(t) + y_5(t) \\ \dot{y}_5(t) = y_4(t) + y_5(t) \\ y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = y_4(0) = y_5(0) = 0 \end{cases}$$

Lösung von Aufgabe 2: Wir bemerken dass das AWP in zwei unabhängige Teile

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = -y_1(t) + y_2(t) + t \\ \dot{y}_2(t) = -3y_1(t) - y_2(t) \\ y_1(0) = y_2(0) = 0 \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} \dot{y}_3(t) = y_3(t) + 1 \\ \dot{y}_4(t) = y_3(t) + y_4(t) + y_5(t) \\ \dot{y}_5(t) = y_4(t) + y_5(t) \\ y_3(0) = y_4(0) = y_5(0) = 0 \end{cases}$$

zerfällt.
Wir lösen zuerst das erste System. Das System ist linear mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom berechnet sich zu

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -3 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)^2 + 3 = \lambda^2 + 2\lambda + 4.$$

Die Eigenwerte sind also $-1 \pm i\sqrt{3}$. Die Eigenvektoren berechnen sich wegen

$$A - (-1 \pm i\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} \mp i\sqrt{3} & 1 \\ -3 & \mp i\sqrt{3} \end{pmatrix} \sim_{\text{(MZ)}} \begin{pmatrix} \mp i\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

zu

$$\begin{pmatrix} \mp i\sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten die homogenen Lösungen

$$y_1^{\text{hom}}(t) = \sqrt{3}\alpha e^{-t} \sin(t\sqrt{3}) - \sqrt{3}\beta e^{-t} \cos(t\sqrt{3})$$

und

$$y_2^{\text{hom}}(t) = 3\alpha e^{-t} \cos(t\sqrt{3}) + 3\beta e^{-t} \sin(t\sqrt{3}).$$

Eine partikuläre Lösung von der inhomogenen DGL können wir über den Ansatz $y_1(t) = at + b$ und $y_2(t) = ct + d$ bekommen. Wir erhalten

$$\begin{cases} a = (c - a + 1)t - b + d \\ c = (-3a - c)t - 3b - d \end{cases}$$

und erhalten $a = c + 1$, $c = -3a$ und damit $a = 1/4$ und $c = -3/4$ sowie $-4b = a + c$ und damit $b = 1/8$ sowie $d = 3/8$. Wir erhalten also die Lösung (partikuläre Lösung plus homogene Lösung)

$$y_1(t) = \frac{1}{4}t + \frac{1}{8} + \sqrt{3}\alpha e^{-t}\sin(t\sqrt{3}) - \sqrt{3}\beta e^{-t}\cos(t\sqrt{3})$$

und

$$y_2(t) = -\frac{3}{4}t + \frac{3}{8} + 3\alpha e^{-t}\cos(t\sqrt{3}) + 3\beta e^{-t}\sin(t\sqrt{3}).$$

Einsetzen des AW liefert

$$y_1(t) = \frac{1}{4}t + \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}e^{-t}\sin(t\sqrt{3}) - \frac{1}{8}e^{-t}\cos(t\sqrt{3})$$

und

$$y_2(t) = -\frac{3}{4}t + \frac{3}{8} - \frac{3}{8}e^{-t}\cos(t\sqrt{3}) + \frac{\sqrt{3}}{8}e^{-t}\sin(t\sqrt{3}).$$

Nun wenden wir uns dem zweiten System

$$\begin{cases} \dot{y}_3(t) = y_3(t) + 1 \\ \dot{y}_4(t) = y_3(t) + y_4(t) + y_5(t) \\ \dot{y}_5(t) = y_4(t) + y_5(t) \\ y_3(0) = y_4(0) = y_5(0) = 0 \end{cases}$$

zu. Das erste können wir lösen und erhalten

$$\begin{cases} y_3(t) = e^t - 1 \\ \dot{y}_4(t) = y_4(t) + y_5(t) - 1 + e^t \\ \dot{y}_5(t) = y_4(t) + y_5(t) \\ y_4(0) = y_5(0) = 0. \end{cases}$$

Wir können dies weiter vereinfachen, wenn wir $u = y_4 - y_5$ betrachten. Dann wird das System zu

$$\begin{cases} y_3(t) = e^t - 1 \\ y_4(t) = u(t) + y_5(t) \\ \dot{u}(t) = -1 + e^t \\ \dot{y}_5(t) = u(t) + 2y_5(t) \\ u(0) = y_5(0) = 0. \end{cases}$$

Nun können wir die Gleichung mit u lösen und erhalten

$$\begin{cases} y_3(t) = 1 \\ y_4(t) = y_5(t) - t - 1 + e^t \\ u(t) = -t - 1 + e^t \\ \dot{y}_5(t) = -t - 1 + e^t + 2y_5(t) \\ y_5(0) = 0. \end{cases}$$

Die letzte verbleibende Gleichung ist eine lineare DGL mit homogener Lösung e^{2t} und partieller Lösung (durch Variation der Konstanten oder den Ansatz $y_p(t) = at + b + ce^t$)

$$y_p(t) = \frac{1}{2}t + \frac{3}{4} - e^t.$$

Wir bekommen also die Lösungen

$$y_3(t) = e^t - 1$$
$$y_4(t) = -\frac{1}{2}t - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{2t}$$
$$y_5(t) = \frac{1}{2}t + \frac{3}{4} - e^t + \frac{1}{4}e^{2t}$$

Bemerkung: Man hätte auch den Standardweg gehen können, aber dieser Weg hier erscheint doch einfacher zu sein. Das sukzessive Lösen ist oft hilfreich. Macht die Sache aber eventuell auch schwerer, weil andere (eventuell kompliziertere) Inhomogenitäten auftreten (insbesondere, wenn das ursprüngliche Problem homogen ist).

Aufgabe 3 (*Existenz und Eindeutigkeit maximaler Lösungen*) (10+10)
Man diskutiere, ob die folgenden Anfangswertprobleme maximale Lösungen besitzen und ob diese eindeutig sind.

(a) $\dot{y}(t) = e^t \sqrt[3]{y(t)}$ und $y(0) = 1$

(b)

$$\begin{cases} y_1''(t) = |y_1'(t)| + 2y_2(t)y_1(t) \\ y_2'(t) = \sin y_1'(t) + y_1(t) + y_2^3(t) + t \\ y_1(0) = y_1'(0) = y_2(0) = 0 \end{cases}$$

Lösung von Aufgabe 3:
ad (a): Es handelt sich hierbei um eine DGL mit der wir in der Tat einfach rechnen können. Da wir Picard-Lindelöf (nur für lokale Lösungen; bei maximalen wissen wir nicht, ob diese irgendwann $y(t) = 0$ erreichen) nicht anwenden können ist es auch ratsam dies zu tun (Sonst können wir wahrscheinlich nichts über die Eindeutigkeit aussagen; Sollte Picard-Lindelöf anwendbar sein aber auch die Lösung bestimmbar, so bietet es sich an Picard-Lindelöf zu benutzen, weil dies eben kein großer Aufand ist).
Wir wollen die Lösung der DGL bestimmen für die $y(t) \neq 0$ ist für alle t im Definitionsintervall[2]. In dem Fall schreibt sich die DGL als (getrennte Veränderliche!)

$$\frac{d}{dt} G(y(t)) = f(t)$$

mit $f(t) = e^t$ und $G(y) = \int y^{-1/3}\,dy = {}^3\!/_2 y^{2/3}$. Wir erhalten damit

$$\frac{3}{2} y(t)^{2/3} = e^t + c$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Wir erkennen nun bereits die notwendinge Bedingung $c + e^t > 0$ an die Konstante. Unter der Bedingung (und immernoch $y(t) \neq 0$) erhalten wir

$$y(t) = \pm \left(\frac{2}{3} e^t + \frac{2}{3} c \right)^{3/2}.$$

Man beachte, dass alle Umformungen Äquivalenzumformungen sind solange die beiden Bedingungen gelten.
Wir setzen nun $c = 1/2$ und wählen das positive Vorzeichen. Dann erhalten wir die Lösung

$$y(t) = \left(\frac{2}{3} e^t + \frac{1}{3} \right)^{3/2}$$

für das Anfangswertproblem für $t \in \mathbb{R}$ (Existenz einer maximalen Lösung - wäre auch schnell mit Peano gegangen!). Die obigen Äquivalenzumformungen gelten solange $y(t) \neq 0$ ist. Insbesondere ist die Lösung eindeutig, solange $y(t) \neq 0$ gilt (auf die Bedingungen achten und sauber arbeiten ist hier wichtig gewesen! Alternativ sieht man das auch mit Picard-Lindelöf; die Rechnung muss man aber machen - siehe Bemerkung!). Dies ist aber offensichtlich der Fall.
Bemerkung 1: Auch für den AW $y(0) \neq 0$ kann man Eindeutigkeit bekommen (die Begründung warum dies so ist aber abhängig davon ob $|y(0)| \geq 2/3$ ist oder nicht - in dem Fall ändert sich die Gestallt der Lösung für kleine t). Ähnliches ist uns auf Blatt 2 bereits begegnet. Für den AW $y(0) = 0$ bekommt man aber keine Eindeutigkeit der maximalen Lösung. Die Situation hängt aber

[2] Wir müssen extrem vorsichtig sein, da wir Existenz und Eindeutigkeit beweisen wollen. Und nicht nur die Existenz!

stark von dem konreten AWP ab. Man kann dies dem AWP nicht sofort ansehen. Beispielsweise besitzt auch

$$\dot{y}(t) = \sqrt[3]{y(t)} \text{ mit } y(0) = 1$$

eine eindeutige maximale Lösung aber

$$\dot{y}(t) = \sqrt[3]{y(t)} \text{ mit } y(0) = 0$$

nicht. Doch das sehr ähnliche AWP besitzt

$$\dot{y}(t) = \sqrt[3]{|y(t)|} \text{ mit } y(0) = y_0$$

für *keinen* Anfangswert $y_0 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige maximale Lösung. Noch extremer besitzt das auch sehr ähnliche AWP

$$\dot{y}(t) = 1 + \sqrt[3]{y(t)} \text{ mit } y(0) = y_0$$

für *jeden* Anfangswert $y_0 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige maximale Lösung. Mit solchen Situationen sollte man in der Klausur auch umgehen können.
Bemerkung 2: Man hätte hier auch so argumentieren können (was je nach Geschmack einfacher gewesen wäre): Man hätte die Lösung

$$y(t) = \left(\frac{2}{3}e^t + \frac{1}{3}\right)^{3/2}$$

mit Lösungsintervall $\mathbb{R}$ berechnen können ohne auf die Bedingungen zu achten. Nun müssen wir uns noch um die Eindeutigkeit kümmern. An der Lösung sehen wir, dass diese nie $y(t) = 0$ erfüllt. Deshalb kann man Picard-Lindelöf anwenden um auf die Eindeutigkeit zu schließen.
ad (b): Das AWP schreibt sich in der Form

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)),\ y(0) = y_0$$

mit

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_1'(t) \end{pmatrix},\ y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$f(t, y) = \begin{pmatrix} y_3 \\ \sin y_3 + y_1 + y_2^3 + t \\ |y_3| + 2y_2y_1 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen nun zeigen, dass f stetig (dies ist klar als Summe von stetigen Funktionen) ist und die lokale Lipschitzbedingung in y erfüllt. Dazu schreiben wir

$$f(t, y) = g(t, y) + h(t, y)$$

mit

$$g(t, y) = \begin{pmatrix} y_3 \\ \sin y_3 + y_1 + y_2^3 + t \\ 2y_2y_1 \end{pmatrix}$$

und

$$h(t, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ |y_3| \end{pmatrix}.$$

Zunächst bemerken wir, dass g pariell nach y differenzierbar ist und die Ableitungen

$$g_{y_1}(t,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y_2 \end{pmatrix}$$

$$g_{y_2}(t,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3y_2^2 \\ 2y_1 \end{pmatrix}$$

$$g_{y_3}(t,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos y_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

stetig sind (als Summe stetiger Funktionen). Nach Vorlesung erfüllt dann g die lokale Lipschitzbedingung in y. Wenn nun auch h die lokale Lipschitzbedingung in y erfüllt, dann klarerweise auch die Summe f. Es ist aber

$$|h(t,y) - h(t,\tilde{y})| \leq |y_3 - \tilde{y}_3| \leq |y - \tilde{y}|$$

und damit erfüllt h die lokale Lipschitzbedingung in y (und damit wie bemerkt auch f). Wir können also Picard-Lindelöf anwenden und erhalten die Existenz und Eindeutigkeit einer maximalen Lösung.

Aufgabe 4 (*Globales Verhalten von Lösungen*) (10+10)

(a) Man beweise oder widerlege, dass das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = \cos y(t) - y(t)^2$ mit $y(0) = 0$ eine globale Lösung besitzt.

(b) Man beweise oder widerlege, dass das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = \cos y(t) + 2 + y(t) + y(t)^3$ mit $y(0) = 0$ eine globale Lösung besitzt.

Lösung von Aufgabe 4: Es sei an dieser Stelle explizit bemerkt, dass es mehr als nur eine Lösungsmöglichkeit gibt. Es ist nicht möglich alle Lösungsmöglichkeiten anzugeben. Wir geben nur die an, die nach unserer Meinung am nähesten zu den Methoden aus der Vorlesung und Übung sind.

ad (a): Zunächst sehen wir, dass das AWP die Standardform $\dot{y}(t) = f(y(t)),\ y(0) = 0$ mit $f(y) = \cos y - y^2$ hat. Die Funktion f ist stetig differenzierbar. Wir befinden uns also in der Situation von Picard-Lindelöf (Peano würde reichen, aber nicht für das Argument, welches wir geben!). Es gibt also eine maximale Lösung y. Weil das AWP in der Standardform ist, f überall definiert ist und dort auch die Voraussetzungen von Picard-Lindelöf erfüllt sind (hier würde Peano reichen), schließen wir auf die Existenz einer maximalen Lösung y, welche entweder unbeschränkt oder global ist.

Weiter gilt offensichtlich

$$\lim_{y\to-\infty} f(y) = -\infty,\ f(0) = 1,\ \lim_{y\to\infty} f(y) = -\infty.$$

Wegen dem Zwischenwertsatz finden wir also x_1, x_2 mit $x_1 < 0$ und $x_2 > 0$ sowie $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Wir bezeichnen nun mit y_1 die konstante Funktion mit Wert x_1 und mit y_2 die konstante Funktion mit Wert x_2. Diese sind beide Lösungen der DGL. Weil diese aber autonom ist und wir uns in der Situation des Picard-Lindelöf-Theorems befinden (Hier würde Peano nicht reichen; Aber man könnte das Argument anpassen, sodass Peano ausreichend ist) können wir anwenden, dass die Bahnen von Lösungen mit verschiedenen Anfangswerten disjunkt sein müssen. Folglich kann die Lösung y des AWPs den Wert x_1 und x_2 nicht annehmen. Aus dem Zwischenwertsatz und $y(0) \in (x_1, x_2)$ folgt also $y(t) \in (x_1, x_2)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ für welche die maximale Lösung y definiert ist.

Nach der obigen Bemerkung, dass y global oder unbeschränkt sein muss, erhalten wir nun, dass y global ist.

ad (b): Wir wollen zeigen, dass es keine globale Lösung gibt. Zunächst bemerken wir wieder, dass das AWP in der Standardform $\dot{y}(t) = f(y(t)),\ y(0) = 0$ ist mit $f(y) = \cos y + 2 + y + y^3$ stetig differenzierbar. Die Voraussetzungen von Picard-Lindelöf sind also erfüllt (An der Stelle könnte auch in der Situation von Peano verbleiben; allerdings haben wir die Aussage über Quasipositivität in dem Fall nicht gemacht und man müsste auf das alternative Argument zurückgreifen). Es existiert also eine maximale Lösung y dieses AWPs. Wir wollen nun folgende Abschätzung beweisen: $f(y(t)) > y(t)^3$ für alle $t \in \mathbb{R}$ solange $y(t)$ definiert ist.

Dazu müssen wir zeigen, dass $y(t) \geq 0$ ist, dann ist die obige Abschätzung klar. Dazu bemerken wir, dass f quasipositiv (sogar $f(0) = 3 > 0$) ist. Folglich ist laut Vorlesung $y(t) \geq 0$ solange $y(t)$ existiert. Wir könnten auch die Methode *Infimum der Gegenbeispiele*, welche wir aus der Übung kennen, anwenden. Dies ist auch genau die Methode, die im Beweis der Aussage benutzt wurde, dass f quasipositiv bereits $y(t) \geq 0$ impliziert.

Nun haben wir also $\dot{y}(t) > y(t)^3$ bewiesen. Der Vergleichssatz der Vorlesung zeigt uns also, dass $y(t) \geq z(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt solange $z(t)$ und $y(t)$ definiert sind. Dabei ist z die maximale Lösung von $\dot{z}(t) = z(t)^3$ mit $z(t_0) = y(t_0)$ für alle $t_0 \in \mathbb{R}$ wo $y(t_0)$ definiert ist (die Wahl $t_0 = 0$ funktioniert nicht, weil dann $z(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist). Wir wählen nun $y(t_0) > 0$ (dies geht etwa weil $y(t) \geq 0$ und $y = 0$ keine Lösung ist) Es ist aber (zum Beispiel über getrennte Veränderliche)

$$z(t) = \left(\frac{t_0 - t}{2} + y(t_0)^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

für $t \in (-\infty, t_0 + 2y(t_0)^{-2})$.
Es gibt nun zwei Fälle. Entweder existiert $y(t)$ nicht für alle $t \in (-\infty, t_0 + 2y(t_0)^{-2})$ (dann sind wir fertig, weil es dann keine globale Lösung gibt), oder es gilt

$$\liminf_{t \to t_0 + 2y(t_0)^{-2} - 0} y(t) \geq \liminf_{t \to t_0 + 2y(t_0)^{-2} - 0} z(t) = \infty,$$

was ebenfalls impliziert, dass y nicht global sein kann (man kann y nicht über den Zeitpunkt $t_0 + 2y(t_0)^{-2}$ hinaus nichtmal stetig fortsetzen).

Aufgabe 5 (*Multiple-Choice*) (20)

Entscheiden Sie jeweils welche Aussage richtig und welche falsch ist. Geben Sie zudem eine Begründung ihrer Auswahl an (Beweis, Gegenbeispiel, Beispiel, etc.).

richtige Antwort	*+1 Punkt*
keine Antwort	*0 Punkte*
falsche Antwort	*-1 Punkt*
richtige Begründung	*+4 Punkte*

Die Geamtpunktzahl wird auf 0 Punkte aufgerundet sollte diese negativ sein.

(a) Das Anfangswertproblem $y''(t) + y(t) + \sin y'(t) = 0$ mit $y(0) = 1$ hat eine eindeutige maximale Lösung.

□ richtig □ falsch

(b) Das Anfangswertproblem $y''(t) + y(t) + \sin y'(t) = 0$ mit $y(0) = y'(0) = 1$ hat eine eindeutige maximale Lösung.

□ richtig □ falsch

(c) Das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = \sqrt{|y(t)|} - \sin(y(t))$ mit $y(0) = 1$ besitzt mindestens eine maximale Lösung.

□ richtig □ falsch

(d) Die Differenzialgleichung

$$\frac{2y(t)\dot{y}(t)}{t^2 + y(t)^2} + \frac{2t}{t^2 + y(t)^2} = 0$$

ist exakt.

□ richtig □ falsch

Lösung von Aufgabe 5: Als Faustregel für die Begründung achten Sie darauf, dass Sie die etwa vier wichtigsten Schritte hinschreiben (natürlich kann man mal eine kürzere Lösung finden, deshalb ist dies nur als Faustregel zu verstehen). Daran orientiert sich die Punktzahl.

ad (a): Die Aussage ist falsch. Die DGL ist in der Form $y''(t) = f(y(t), y'(t))$ mit $f(y, z) = -y - \sin z$ stetig differenzierbar. Aus dem Theorem von Picard-Lindelöf für Systeme zweiter Ordnung aus der Vorlesung erhalten wir die Existenz von y_1 mit

$$y_1''(t) + y_1(t) + \sin y_1'(t) = 0 \text{ mit } y_1(0) = 1 \text{ und } y_1'(0) = 1$$

und y_2 mit

$$y_2''(t) + y_2(t) + \sin y_2'(t) = 0 \text{ mit } y_2(0) = 1 \text{ und } y_2'(0) = 0.$$

Nun sind y_1 und y_2 zwei verschiedene Lösungen des angegebenen AWPs.

ad (b): Die Aussage ist richtig. Das AWP ist in der Form

$$y''(t) = f(y(t), y'(t))$$

mit $y(0) = y'(0) = 0$ mit $f(y, z) = -y - \sin z$ stetig differenzierbar. Aus dem Theorem von Picard-Lindelöf (und dem Eindeutigkeitssatz) für Systeme zweiter Ordnung aus der Vorlesung erhalten wir die Existenz und Eindeutigkeit maximaler Lösungen.

ad (c): Die Aussage ist richtig.

Das Anfangswertproblem ist in der Standardform

$$\dot{y}(t) = f(y(t)),\ y(0) = 1$$

mit $f(y) = \sqrt{|y|} - \sin y$ stetig. Der Satz von Peano und die Implikationen daraus aus der Vorlesung implizieren die Existenz von maximalen (bzw. maximaldefinierten) Lösungen.

ad (d): Die Aussage ist richtig. Dazu bemerken wir, dass die DGL in der Form

$$p(t, y(t))\dot{y}(t) + q(t, y(t)) = 0$$

mit $p(t, y) = 2y(t^2 + y^2)^{-1}$ und $q(t, y) = 2t(t^2 + y^2)^{-1}$ gegeben ist. Es ist zudem

$$F(t, y) = \log \left| t^2 + y^2 \right|$$

derart, dass F definiert ist, wann immer die DGL Sinn macht und es gilt $F_t = q$ sowie $F_y = p$. Folglich ist die DGL exakt. *Bemerkung:* Die notwendigen Bedingungen für die Existenz einer Funktion F mit $F_y = p$ und $F_t = q$ (nämlich $p_t = q_y$) sind erfüllt. Weiter ist der maximale Definitionsbereich

$$\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$$

und enthält damit Löcher (ist **nicht** einfach zusammenhängend) folglich lässt sich daraus also nicht die Existenz von F mit $F_y = p$ und $F_t = q$ folgern. Beispielsweise die leicht veränderte DGL

$$\frac{2t\dot{y}(t)}{t^2 + y(t)^2} - \frac{2y(t)}{t^2 + y(t)^2} = 0$$

ist nicht exakt, obwohl diese die gleichen Eigenschaften hat.

Aufgabe 6 (*Bonusaufgabe*) (20*)
Man widerlege folgende Aussage:
Für $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar hat das Anfangswertproblem

$$y''(t) = f(y(t), y'(t)), \quad y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_1$$

bekanntlich eine eindeutige maximale Lösung. Wir setzen nun weiter voraus, dass diese maximale Lösung $y\colon I \to \mathbb{R}$ beschränkt ist auf $I \cap [t_0, \infty)$. In dem Fall gilt bereits $I \supset [t_0, \infty)$.
Hinweis: Aus der Vorlesung wissen Sie, was mit der Lösung am Rand passieren kann. Sie sollten also zuerst ein geeignetes y suchen. Danach sollten Sie f derart wählen, dass y eine Lösung der Differenzialgleichung wird.

Lösung von Aufgabe 6: Die Folgerung wäre richtig, wenn auch noch die Ableitung $y'(t)$ für $t \in I \cap [t_0, \infty)$ beschränkt wäre. Um ein Gegenbeispiel zu finden müssen wir also eine Funktion wählen dessen Ableitung in endlicher Zeit explodiert. Eine einfache Funktion mit dieser Eigenschaft ist

$$y(t) = \sqrt{-t}.$$

Wir wollen eine DGL finden die y als maximale Lösung mit dem Intervall $I = (-\infty, 0)$ hat. Um so eine DGL zu finden berechnen wir die Ableitungen:

$$y'(t) = -\frac{1}{2}(-t)^{-1/2}$$

und

$$y''(t) = \frac{1}{4}(-t)^{-3/2} = -\frac{1}{2}\left(y'(t)\right)^3.$$

Wir kommen also zu dem erstaunlich einfachen AWP

$$y''(t) = \frac{1}{2}\left(y'(t)\right)^3, \quad y(-1) = 1,\ y'(-1) = -\frac{1}{2}$$

dessen eindeutige maximale Lösung nach Konstruktion gegeben ist durch $y(t) = \sqrt{t}$ auf dem Intervall $I = (-\infty, 0)$. Diese Lösung ist aber beschänkt auf $I \cap [-1, \infty) = [-1, 0)$, hat also die verlangten Eigenschaften.