ulm university universität uulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Sommersemester 2015

Lösungsvorschläge zur ersten Klausur

Gewöhnliche Differenzialgleichungen

am 20.6.2015 um 10 Uhr. Bearbeitungszeit beträgt zwei Stunden.

Achten Sie auf vollständige, saubere und schlüssige Argumentation! 100% entsprechen 100 Punkten.

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1 (*Maximale Lösungen explizit berechnen*) (10+10)

Man gebe jeweils eine maximale Lösung der folgenden Anfangswertprobleme an. Sie müssen nicht zeigen, dass die Lösung eindeutig ist, aber nachweisen, dass ihr Ergebnis eine maximale Lösung ist.

(a) $3ty(t)^2\dot{y}(t) + y(t)^3 + t^2 = 0$ mit $y(1) = 1$.

(b) $\dot{y}(t) = |y(t) + 1| + 1$ mit $y(0) = 0$.

Lösung von Aufgabe 1:

ad (a): Die DGL könnte eine exakte DGL sein, weil diese in der Form

$$q(t, y(t))\dot{y}(t) + p(t, y(t)) = 0$$

vorliegt. Dabei ist $q(t, y) = 3ty^2$ und $p(t, y) = y^3 + t^2$. Um dies zu bestätigen müssen wir eine Funktion $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ finden mit $\varphi_t = p$ und $\varphi_y = q$. Eine solche Funktion ist gegeben durch $\varphi(t, y) = ty^3 + {}^1\!/_3 t^3$. Laut Vorlesung ist eine differenzierbare Funktion y eine Lösung der DGL genau dann, wenn diese

$$\varphi(t, y(t)) = c$$

für eine Konstante c (welche durch den AW fixiert wird) erfüllt. Dies kann man ohne Probleme auflösen solange $t \neq 0$ ist und wir erhalten also

$$y(t) = \sqrt[3]{\frac{c}{t} - \frac{t^2}{3}}.$$

einsetzen von $t = 1$ und beachten des AW liefert $c = {}^4\!/_3$. Die Lösung ist also gegeben durch

$$y(t) = \sqrt[3]{\frac{4}{3t} - \frac{t^2}{3}}$$

für $t \in (0, \sqrt[3]{4})$. Da die Lösung für $t \to 0+$ und deren Ableitung für $t \to \sqrt[3]{4}-$ explodiert, kann die Lösung nicht fortgesetzt werden. Folglich ist $(0, \sqrt[3]{4})$ das maximale Existenzintervall.

ad (b): Wegen dem Anfangswert lösen wir zuerst

$$\dot{y}_1(t) = y_1(t) + 2$$

mit $y_1(0) = 0$. Die Lösung dieses AWPs ist solange eine Lösung des ursprünglichen AWPs wie $y_1(t) + 1 \geq 0$ gilt. Hierbei handelt es sich aber um eine lineare inhomogenen DGL mit den homogenen Lösungen ce^t (mit c konstant) und der partiellen Lösung -2 (Raten, Variation der Konstanten, anderer Ansatz,...). Eine allgemeine Lösung erhält man aus Summe einer partiellen mit einer homogenen Lösung. Es ist also nach der Bemerkung $y_1(t) = 2e^t - 2$ die Lösung für $t \in [-\log(2), \infty)$ das ursprüngliche AWP. Wir wissen aus Kriterien der Vorlesung, dass die Lösung noch weiter existieren muss. Deshalb lösen wir

$$\dot{y}_2(t) = -y_2(t)$$

mit $y_2(-\log(2)) = -1$. Die allgemeine Lösung ist gegeben durch ce^{-t} für eine Konstante c. Deshalb ist $y_2(t) = -{}^1\!/\!_2 e^{-t}$. Die DGL für y_2 entspricht der für y, falls $y_2(t) < -1$ ist. Dies ist der Fall für $t \leq -\log(2)$. Damit lässt sich also die Lösung verkleben (siehe Blatt 1 Aufgabe 4) zu einer globalen Lösung (weil Existenzintervall $\mathbb{R}$ ist)

$$y(t) = \begin{cases} 2e^t - 2 & \text{, für } t \geq -\log(2) \\ -{}^1\!/\!_2 e^{-t} & \text{, für } t \leq -\log(2) \end{cases}$$

des angegebenen AWPs mit Existenzintervall $\mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (*Lineare Differenzialgleichungssysteme*) (20)

Man gebe die Menge aller reellen Lösungen von

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_1(t) + 3y_3(t) \\ \dot{y}_2(t) = y_2(t) + y_4(t) \\ \dot{y}_3(t) = -y_1(t) + 3y_3(t) \\ \dot{y}_4(t) = y_4(t) \\ \dot{y}_5(t) = y_2(t) + y_5(t) \end{cases}$$

in parametrisierter Form an.

Lösung von Aufgabe 2: Wir können die DGL in zwei Teile

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_1(t) + 3y_3(t) \\ \dot{y}_3(t) = -y_1(t) + 3y_3(t) \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} \dot{y}_2(t) = y_2(t) + y_4(t) \\ \dot{y}_4(t) = y_4(t) \\ \dot{y}_5(t) = y_2(t) + y_5(t) \end{cases}$$

zerlegen, die wir getrennt lösen.

Das erste Teilsystem ist in der Form $\dot{u} = Au$ mit

$$u(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$$

und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ergibt sich zu

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda) = (1 - \lambda)(3 - \lambda) + 3 = \lambda^2 - 4\lambda + 6.$$

Die Nullstellen dieses Polynoms und damit die Eigenwerte von A sind gegeben durch $2 \pm i\sqrt{2}$. Ein Eigenvektor zu $2 \pm i\sqrt{2}$ ist wegen

$$A - (2 \pm i\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} -1 \mp i\sqrt{2} & 3 \\ -1 & 1 \mp i\sqrt{2} \end{pmatrix} \sim_{\text{MZ}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \mp i\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

gegeben durch

$$\begin{pmatrix} -1 \pm i\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten das komplexe Fundamentalsystem

$$e^{2t+it\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 + i\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \; e^{2t-it\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 - i\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Daraus errechnen wir das reelle Fundamentalsystem

$$\operatorname{Re}\left(e^{2t+it\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 + i\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} \right) = e^{2t} \begin{pmatrix} -\cos(t\sqrt{2}) - \sqrt{2}\sin(t\sqrt{2}) \\ -\cos(t\sqrt{2}) \end{pmatrix}$$

zusammen mit

$$\operatorname{Im}\left(e^{2t+it\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1+i\sqrt{2}\\-1\end{pmatrix}\right)=e^{2t}\begin{pmatrix}-\sin(t\sqrt{2})+\sqrt{2}\cos(t\sqrt{2})\\-\sin(t\sqrt{2})\end{pmatrix}.$$

Wir erhalten deshalb die reellen Lösungen

$$\begin{aligned}y_1(t)&=-\alpha e^{2t}\cos(t\sqrt{2})-\alpha\sqrt{2}e^{2t}\sin(t\sqrt{2})-\beta e^{2t}\sin(t\sqrt{2})+\beta e^{2t}\sqrt{2}\cos(t\sqrt{2})\\y_3(t)&=-\alpha e^{2t}\cos(t\sqrt{2})-\beta e^{2t}\sin(t\sqrt{2})\end{aligned}$$

für $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
Nun kommen wir zum zweiten Teilsystem. Dies sortieren wir einmal geschickt um in

$$\begin{cases}\dot{y}_5(t)=y_2(t)+y_5(t)\\\dot{y}_2(t)=y_2(t)+y_4(t)\\\dot{y}_4(t)=y_4(t).\end{cases}$$

Wenn man nun die Matrix für das System $\dot{u}=Au$ mit

$$u(t)=\begin{pmatrix}y_5(t)\\y_2(t)\\y_4(t)\end{pmatrix}$$

abliest, dann erhält man

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist dankbarerweise schon in der Jordanform und deshalb ist die Lösung gegeben durch

$$y_4(t)=\gamma e^t,\ y_2(t)=\delta e^t+\gamma te^t,\ y_5(t)=\epsilon e^t+\delta te^t+\frac{\gamma}{2}t^2e^t$$

für beliebige Konstanten $\gamma,\delta,\epsilon\in\mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (*Existenz und Eindeutigkeit maximaler Lösungen*) (10+10+10)

Man diskutiere, ob die folgenden Anfangswertprobleme maximale Lösungen besitzen und ob diese eindeutig sind.

(a) $\dot{y}(t) = \sqrt{|t+1|}|\sin y(t)| + |t^2 + t + \cos(t)|$ und $y(0) = 0$

(b)

$$\begin{cases} y_1'''(t) = \sin y_1(t) + y_1''(t) y_2(t) + 1 \\ y_2'(t) = t\cos y_1'(t) + 2\sin y_2(t) + y_1'''(t) \\ y_1(0) = y_1'(0) = y_1''(0) = y_2(0) = 0 \end{cases}$$

(c) $\dot{y}(t) = e^t \sqrt[3]{y(t)}$ und $y(0) = 0$

Lösung von Aufgabe 3:

ad (a): Die DGL schreibt sich in der Form $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ mit

$$f(t,y) = \sqrt{|t+1|}|\sin y| + |t^2 + t + \cos(t)|.$$

Weiter ist f klarerweise stetig und erfüllt die Lipschitzbedingung ($t \le \tau$, $|y|, |\tilde{y}| < R$):

$$|f(t,y) - f(t,\tilde{y})| \le \sqrt{|t+1|}\,||\sin y| - |\sin y|| \le \sqrt{|\tau+1|}|y - \tilde{y}|.$$

Folgich existiert vom AWP genau eine maximale Lösung (Picard-Lindelöf).

ad (b): Mit

$$u(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_1'(t) \\ y_1''(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

schreibt sich das System in der Form $\dot{u} = f(t, u(t))$ mit

$$f(t,u) = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ \sin u_1 + u_3 u_4 + 1 \\ t\cos u_2 + 2\sin u_4 + \sin u_1 + u_3 u_4 + 1 \end{pmatrix}.$$

Man erkennt, dass f stetig ist. Weier ist f auch stetig differenzierbar in den Variablen von u. Folglich erfüllt f auch die Lipschitzbedingung. Eine Anwendung von Picard-Lindelöf liefert also die Existenz und Eindeutigkeit maximaler Lösungen.

ad (c): Die Existenz einer maximalen Lösung ist klar. Dazu nimmt man etwa die konstante Lösung $y(t) = 0$ auf $\mathbb{R}$. Die maximale Lösung ist nicht eindeutig. Wir konstruieren eine weitere Lösung über die getrennten Veränderlichen. Die DGL schreibt sich also in der Form (für $y(t) \neq 0$!)

$$\frac{3}{2} y(t)^{2/3} = e^t + c$$

für eine Konstante c. Wir erhalten also für eine Konstante d

$$y(t) = \pm \left(\frac{2}{3}e^t + d\right)^{3/2}.$$

Für $d = -2/3$ ist

$$y(t) = \left(\frac{2}{3}e^t - \frac{2}{3}\right)^{3/2}$$

also eine Lösung für $t \geq 0$. Wir können die Lösung nun zu einer maximalen Lösung des AWPs (Verkleben von Lösungen!)

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \left(\frac{2}{3}e^t - \frac{2}{3}\right)^{3/2} & t \geq 0 \end{cases}$$

fortsetzen und erhalten so ein Gegenbeispiel zur Eindeutigkeit.

Aufgabe 4 (*Globales Verhalten von Lösungen*) (10+10+10)

(a) Man beweise oder widerlege, dass $\dot{y}(t) = \sqrt{|t+1|}|\sin y(t)| + |t^2 + t + \cos(t)|$ mit $y(0) = y_0$ (mit $y_0 \in \mathbb{R}$ fest vorgegeben) eine globale Lösung besitzt (vgl Aufgabe 3 (a)).

(b) Es gibt eine eindeutige globale Lösung von $\dot{y}(t) = \cos y(t) + y(t)^2 - y(t)^3$ mit $y(0) = 0$ und diese ist beschränkt (dies müssen Sie nicht zeigen). Beweisen Sie, dass $y(t)$ für $t \to \infty$ gegen die kleinste positive Nullstelle von $f(x) = \cos x + x^2 - x^3$ konvergiert.

(c) Man beweise oder widerlege, dass $\dot{y}(t) = ty(t) - y(t)^2 + 2$ mit $y(0) = 0$ eine Lösung $y\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ besitzt.

Lösung von Aufgabe 4:

ad (a): In der Aufgabe 3 (c) haben wir gesehen, dass die DGL die Voraussetzungen für Picard-Lindelöf erfüllt. Deshalb muss es eine maximale Lösung geben. Wir wollen nun zeigen, dass diese global ist. Wir bezeichnen mit f die gleichen Funktion wie in Aufgabe 3 (c). Wegen

$$|f(t, y)| \leq \alpha(t)|y| + \beta(t)$$

für $\alpha(t) = 0$ und $\beta(t) = \sqrt{|t+1|} + |t^2 + t + \cos(t)|$ folgt die Existenz einer globalen Lösung über ein Kriterium der Vorlesung.

ad (b): Dies ist ein Teil der versteckten Bonusaufgaben Die Funktion f ist stetig und es gilt $f(0) = 1$ und $f(x) \to -\infty$ für $x \to \infty$. Deshalb gibt es eine kleineste positive Nullstelle $x_0 > 0$ (Zwischenwertsatz). Weil sich Bahnen nicht kreuzen dürfen erhalten wir, dass $0 \leq y(t) \leq x_0$ gilt. Also gilt $y'(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Die Funktion y ist also beschränkt und monoton also konvergent. Der Grenzwert y_* erfüllt nach einer Übungsaufgabe die Gleichung $f(y_*) = 0$. Natürlich gilt auch $0 \leq y_* \leq x_0$. Folglich ist $y_* = x_0$.

ad (c): Dies ist ein Teil der versteckten Bonusaufgaben Das AWP erfüllt offensichtlich die Bedingungen von Picard-Lindelöf. Folglich gibt es eine eindeutige maximale Lösung $y\colon I \to \mathbb{R}$. Wir müssen nun zeigen, dass diese beschränkt ist auf $I \cap [0, T)$ für alle $T \geq 0$ (Verhalten von Lösungen am Rand des maximalen Existenzintervalls laut Vorlesung).

Weil $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ mit $f(t, y) = ty - y^2 + 2$ quasipositiv (also $f(t, 0) \geq 0$) ist, folgt laut Vorlesung, dass $y(t) \geq 0$ auf $I \cap [0, T)$ gilt.

Es sei nun $C > 0$ derart, dass $f(t, C) < 0$ für alle $t \leq T$ gilt - dies kann man erreichen, weil

$$\sup_{t \in (0,T)} f(t, y) \to -\infty$$

für $y \to \infty$ gilt. Nun gilt aber $y(t) \leq C$ für alle $t \in I \cap [0, T)$. Wenn dies nicht gelten würde, dann wäre

$$t_0 = \inf\{t > 0 : \ y(t) > C\} \in (0, T)$$

mit $y(t_0) = C$ und $y'(t_0) \geq 0$. Nun folgt aber der Widerspruch

$$0 \leq y'(t_0) = f(t_0, y(t_0)) = f(t_0, C) < 0.$$

Insbesondere ist damit $y(t) \in [0, C]$ für alle $t \in I \cap [0, T)$. Mit der Bemerkung von oben schließen wir auf die Existenz einer Lösung $y\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 5 (*Multiple-Choice*) (20)

Entscheiden Sie jeweils welche Aussage richtig und welche falsch ist. Geben Sie zudem eine Begründung ihrer Auswahl an (Beweis, Gegenbeispiel, etc.).

richtige Antwort	*+1 Punkt*
keine Antwort	*0 Punkte*
falsche Antwort	*-1 Punkt*
richtige Begründung	*+4 Punkte*

Die Geamtpunktzahl wird auf 0 Punkte aufgerundet sollte diese negativ sein.

(a) Das AWP $|\dot{y}(t)| = y(t)$ mit $y(0) = 1$ hat genau eine maximale Lösung.
 ☐ richtig ☐ falsch

(b) Das AWP $\dot{y}(t) = |y(t) + 1|$ mit $y(0) = 1$ hat genau eine maximale Lösung.
 ☐ richtig ☐ falsch

(c) Die DGL

$$2ty(t)\dot{y}(t) + t^2 + y(t) = 0$$

ist exakt.
 ☐ richtig ☐ falsch

(d) Die globalen Lösungen von

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) + y_2(t) + 2y_3(t) \\ y_2'(t) = y_1(t) - y_2(t) \\ y_3'(t) = y_1(t) - 2y_2(t) + y_3(t) \end{cases}$$

bilden einen Vektorraum der Dimension 3.
 ☐ richtig ☐ falsch

Lösung von Aufgabe 5:

ad (a): Die Aussage ist falsch. Es sind $y(t) = e^t$ (Lösung von $\dot{y}(t) = y(t)$ mit $y(0) = 1$) und $y(t) = e^{-t}$ (Lösung von $\dot{y}(t) = -y(t)$ mit $y(0) = 1$) beides Lösungen des AWPs.

ad (b): Die DGL ist von der Form $\dot{y}(t) = f(y(t))$ mit $f(x) = |x+1|$ Lipschitz-stetig. Folglich folgt nach Picard-Lindelöf die Existenz genau einer maximalen Lösung. Die Aussage ist also richtig.

ad (c): Die Aussage ist falsch. Die DGL ist zwar von der Form

$$q(t, y(t))\dot{y}(t) + p(t, y(t)) = 0$$

mit $q(t, y) = 2ty$ und $p(t, y) = t^2 + y$ erfüllt aber nicht die notwendige Bedingung

$$p_y = q_t,$$

denn es ist

$$p_y(t, y) = 1$$

und

$$q_t(t, y) = 2y.$$

ad (d): Die Aussage ist richtig. Die Menge der globalen Lösungen eines linearen homogenen Differenzialgleichungssystems erster Ordnung bildet nach Vorlesung einen Vektorraum der Dimension der Größe des Systems (in dem Fall 3).