ulm university universität uulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Sommersemester 2015

Lösungsvorschläge zur ersten Klausur

Gewöhnliche Differenzialgleichungen

am 2.9.2015 um 12 Uhr. Bearbeitungszeit beträgt zwei Stunden.

Achten Sie auf vollständige, saubere und schlüssige Argumentation! 100% entsprechen 100 Punkten.

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1 (*Maximale Lösungen explizit berechnen*) (10+10)

Man gebe jeweils eine maximale Lösung der folgenden Anfangswertprobleme an. Sie müssen nicht zeigen, dass die Lösung eindeutig ist, aber nachweisen, dass ihr Ergebnis eine maximale Lösung ist.

(a) $\dot{y}(t) = 2ty^3(t) + |y(t)|^3$ mit $y(0) = -1/2$.

(b) $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = t$ mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = 0$.

Lösung von Aufgabe 1:

ad (a): Solange $y(t) < 0$ ist, was wegen dem AW zumindest lokal der Fall ist, müssen wir $\dot{y}(t) = (2t-1)y^3(t)$ mit $y(0) = -1/2$ untersuchen. Wir verwenden den Ansatz der getrennten Veränderlichen an und erhalten

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}y^{-2}(t)\right) = 2t - 1$$

zumindest solange $y(t) < 0$ gilt. Wir erhalten also

$$-\frac{1}{2}y^{-2}(t) = t^2 - t + c$$

für ein $c \in \mathbb{R}$. Einsetzen des AW liefert $c = -2$. Wir erhalten also (durch Auflösen) die Lösung

$$y(t) = \pm\left(-2t^2 + 2t + 4\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Der AW liefert uns das Vorzeichen $-$. Wir erhalten also, dass dies eine Lösung des ursprünglichen Problems ist, solange der Ausdruck $-2t^2 + 2t + 4$ positiv ist. Dies ist der Fall solange t zwischen den beiden Nullstellen von $-t^2 + t + 2$ liegt. Wir erhalten also die Lösung

$$y(t) = -\left(-2t^2 + 2t + 4\right)^{-\frac{1}{2}}$$

auf dem Intervall $I = (-1, 2)$. Den Fall $y(t) > 0$ müssen wir garnicht untersuchen, weil diese Lösung schon maximal ist. Dies erkennt man daran, dass an den beiden Enden des Intervalls der Funktionswert explodiert. Die Funktion y kann also nicht weiter stetig fortgesetzt werden und die Lösung ist somit maximal.

Als kleine Bemerkung ist hier zu sagen, dass man an der DGL selbst schon sehen konnte, dass eine Lösung y das Vorzeichen nicht wechseln kann. Dies rührt daher, dass diese sonst $y(t_0) = 0$ für ein t_0 erfüllt und folglich y konstant 0 (was selbst auch eine Lösung der DGL ist) wäre wegen dem Eindeutigkeitssatz, der hier verwendet werden kann.

ad (b): Wir haben mehrere Wege in der Vorlesung kennengelernt ein solches System zu lösen. Alle betrachten aber zunächst die homogene DGL. Dieses kann man berechnen, indem man die DGL auf ein System erster Ordnung transformiert, indem wir das charakteristische Polynom benutzen, oder indem wir etwas Lineare Algebra benutzen und den Differenzialoperator faktorisiert. Danach muss man eine partielle Lösung berechnen. Entweder über die Variation der Konstanten, oder durch einen anderen geschickten Ansatz. Wir führen eines der Lösungsmethoden aus:
Wir berechnen zunächst die homogenen Lösungen der DGL. Dazu berechnen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1$$

Die einzige Nullstelle ist $\lambda = 1$ (doppelte Nullstelle). Nach Vorlesung ist damit die Menge der homogenen Lösungen gegeben durch

$$y_{\text{hom}}(t) = \alpha e^t + \beta t e^t$$

für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Wir wollen nun eine partielle Lösung berechnen. Wir machen dazu den Ansatz $y_{\text{par}}(t) = at^2 + bt + c$ und erhalten (indem wir in die DGL einsetzen)

$$2a - 2(2at + b) + at^2 + bt + c = t.$$

Eine Lösung ist gegeben durch $a = 0$, $b = 1$ und $c = 2$. Wir erhalten so die allgemeine Lösung der DGL

$$y_{\text{alg}}(t) = t + 2 + \alpha e^t + \beta t e^t.$$

Um α und β zu bestimmen setzen wir die AW ein. Wir erhalten

$$1 = y_{\text{alg}}(0) = 2 + \alpha$$

und

$$0 = y'_{\text{alg}}(0) = 1 + \alpha + \beta.$$

Damit erhalten wir die Lösung

$$y(t) = t + 2 - 2e^t + te^t$$

von unserem AWP auf dem Intervall $\mathbb{R}$ (klarerweise maximal).

Aufgabe 2 (*Lineare Differenzialgleichungssysteme*) (20)

Man gebe die Menge aller reellen Lösungen von

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_1(t) - y_5(t) \\ \dot{y}_2(t) = y_2(t) + y_4(t) \\ \dot{y}_3(t) = y_2(t) + y_4(t) + 2y_3(t) \\ \dot{y}_4(t) = y_2(t) + y_4(t) \\ \dot{y}_5(t) = y_1(t) + y_5(t) \end{cases}$$

in parametrisierter Form an.

Lösung von Aufgabe 2: Das gegebene System zerfällt in zwei kleinere Teilsysteme

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_1(t) - y_5(t) \\ \dot{y}_5(t) = y_1(t) + y_5(t) \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} \dot{y}_2(t) = y_2(t) + y_4(t) \\ \dot{y}_3(t) = y_2(t) + y_4(t) + 2y_3(t) \\ \dot{y}_4(t) = y_2(t) + y_4(t). \end{cases}$$

Wir lösen das erste Teilsystem indem wir die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

diagonalisieren. Das charakteristische Polynom ergibt sich zu

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda) = (1 - \lambda)^2 + 1.$$

Die Eigenwerte der Matrix sind also $1 \pm i$. Die zugehörigen Eigenvektoren sind einfach zu berechnen und ergeben sich zu

$$\begin{pmatrix} \pm i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten also das komplexe Fundamentalsystem bestehend aus den zwei vektorwertigen Funktionen

$$e^{t \pm it} \begin{pmatrix} \pm i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Durch Betrachtung von Real- und Imaginärteilen eines der beiden Funktionen erhalten wir das reelle Fundamentalsystem

$$e^t \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}, \ e^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten dann die allgemeinen reellen Lösungen für das erste Teilsystem durch ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} y_1(t) = -\alpha e^t \sin(t) + \beta e^t \cos(t) \\ y_5(t) = \alpha e^t \cos(t) + \beta e^t \sin(t) \end{cases}$$

Um das zweite Teilsystem zu lösen (man könnte natürlich auch die Jordansche Normalform berechnen bzw. die Hauptvektorketten bestimmen!) lösen wir das System sukzessiv. Zunächst führen wir eine neue Funktion $z = y_2 - y_4$ ein. Das zweite Teilsystem ist also äquivalent zu

$$\begin{cases} z(t) = y_2(t) - y_4(t) \\ \dot{z}(t) = 0 \\ \dot{y}_3(t) = z(t) + 2y_4(t) + 2y_3(t) \\ \dot{y}_4(t) = z(t) + 2y_4(t). \end{cases}$$

Wir können nun die DGL in Zeile zwei lösen und erhalten für ein $\gamma \in \mathbb{R}$ das äquivalente System

$$\begin{cases} \gamma = y_2(t) - y_4(t) \\ \dot{y}_3(t) = \gamma + 2y_4(t) + 2y_3(t) \\ \dot{y}_4(t) = \gamma + 2y_4(t). \end{cases}$$

Die DGL in Zeile drei ist nun einfach lösbar. Eine partielle Lösung ist gegeben durch $-\gamma/2$ und die homogene Lösung ist gegeben durch e^{2t}. Wir erhalten also das äquivalente System (für $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} y_2(t) = \frac{1}{2}\gamma + \delta e^{2t} \\ \dot{y}_3(t) = 2\delta e^{2t} + 2y_3(t) \\ y_4(t) = -\frac{1}{2}\gamma + \delta e^{2t}. \end{cases}$$

Nun müssen wir nur nich die letzte verbleibende DGL lösen. Eine homogene Lösung ist wieder gegeben durch e^{2t} und eine partielle Lösung durch $2\delta t e^{2t}$ (aus Erfahrung, oder durch Variation der Konstanten). Das System ist damit gelöst. Eine allgemeine reelle Lösung des Systems ist also gegeben durch

$$\begin{cases} y_1(t) = -\alpha e^t \sin(t) + \beta e^t \cos(t) \\ y_2(t) = \frac{1}{2}\gamma + \delta e^{2t} \\ y_3(t) = 2\delta t e^{2t} + \epsilon e^{2t} \\ y_4(t) = -\frac{1}{2}\gamma + \delta e^{2t} \\ y_5(t) = \alpha e^t \cos(t) + \beta e^t \sin(t) \end{cases}$$

für $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (*Existenz und Eindeutigkeit maximaler Lösungen*) (10+10+10)
Man diskutiere, ob die folgenden Anfangswertprobleme maximale Lösungen besitzen und ob diese eindeutig sind.

(a) $\dot{y}(t) = \sqrt{|t|}\exp|y(t)| + 1 + \sqrt{|y(t)|}\sin y(t) + t^2$ und $y(0) = 0$

(b)

$$\begin{cases} y_1''(t) = \cos y_1(t) + y_1'(t)y_2(t) + e^t \\ y_2''(t) = \sqrt{t+1}y_1'(t) + 2\sin y_2'(t) \\ y_1(0) = y_1'(0) = y_2(0) = y_2'(0) = 0 \end{cases}$$

(c) $\dot{y}(t) = -t\sqrt[3]{y(t)}$ und $y(0) = 0$

Lösung von Aufgabe 3:

ad (a): Wir wollen zeigen, dass die Funktion $f(t,x) = \sqrt{|t|}\exp|x| + 1 + \sqrt{|x|}\sin x + t^2$ der Lipschitzbedingung aus der Vorlesung genügt. Dazu teilen wir die Funktion in zwei Teile

$$f(t,x) = g(t,x) + h(t,x)$$

mit

$$g(t,x) = \sqrt{|t|}\exp|x|$$

und

$$h(t,x) = 1 + \sqrt{|x|}\sin x + t^2.$$

Die Funktion h ist stetig differenzierbar (und genügt damit der Lipschitzbedingung). Dies ist offensichtlich. Der einzige kritische Teil ist, ob auch $\sqrt{|x|}\sin x$ in $x = 0$ stetig differenzierbar ist. Dies kann man

abstrakt argumentieren Es ist $\sqrt{|x|}x$ eine bekanntlich eine stetig differenzierbare Funktion zudem ist aber auch $x^{-1}\sin(x)$ (mit 1 in 0 stetig fortgesetzt) eine stetig differenzierbare Funktion (Wissen, oder Potenzreihe anschauen).

oder ganz konkret machen Die Ableitung ergibt sich zu

$$\frac{1}{2\sqrt{|x|}}\sin x + \sqrt{|x|}\cos x$$

für $x \neq 0$, was gegen 0 für $x \to 0$ konvergiert. Die Ableitung von $\sqrt{|x|}\sin x$ in $x = 0$ bekommt man, weil der Differenzenquotient

$$\frac{\sqrt{|h|}\sin h}{h} = \sqrt{|h|}\frac{\sin h}{h} \to 0 \cdot \sin'(0) = 0$$

mit $h \to 0$ konvergiert.

Damit ist h stetig differenzierbar und ist damit stetig und genügt der Lipschitzbedingung.
Bei g rechnen wir die Lipschitzbedingung nach ($|t| \leq \tau$, $|x|, |\tilde{x}| \leq R$ - Wir verwenden, dass exp Lipschitzstetig ist auf $(-R, R)$ mit Konstante e^R und die untere Dreiecksungleichung):

$$|g(t,x) - g(t,\tilde{x})| = \sqrt{|t|}\left|e^{|x|} - e^{|\tilde{x}|}\right| \leq \sqrt{|\tau|}e^R\,||x| - |\tilde{x}|| \leq \sqrt{|\tau|}e^R\,|x - \tilde{x}|$$

Als Summe von zwei stetigen Funktionen, welche die Lipschitzbedingung genügen, genügt auch f der Lipschitzbedingung und ist stetig. Eine Anwendung von Picard-Lindelöf liefert also die Existenz und Eindeutigkeit maximaler Lösungen von

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)),\ y(0) = 0.$$

Aber dies ist nichts anderes als unser gegebenes AWP. Man hätte die Lipschitzstetigkeit von f auch so zeigen können (was sogar einfacher gewesen wäre!).

ad (b): Das AWP hat die Form

$$\begin{cases} y''(t) = f(t, y(t), y'(t)) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

für

$$f(t, x, z) = \begin{pmatrix} \cos x_1 + z_1 x_2 + e^t \\ \sqrt{t+1} z_1 + 2 \sin z_2 \end{pmatrix}$$

diese Funktion ist aber offensichtlich differenzierbar in x und z mit stetigen Ableitungen. Deshalb erfüllt f nach Vorlesung auch die Lipschitzbedingung. Eine Anwendung von Picard-Lindelöf (für Systeme zweiter Ordnung) liefert nun, dass es genau eine maximale Lösung des AWPs gibt (Hierzu muss man noch erwähnen, dass die Funktion f stetig in ihrem Definitionsbereich $\mathbb{R}^5$!).

ad (c) - Dies ist ein Teil der versteckten Bonusaufgaben: Die konstante Lösung $y(t) = 0$ auf $\mathbb{R}$ ist offensichtlich eine maximale Lösung. Wir zeigen nun, dass es keine weitere maximale Lösung geben kann. Es sei dazu $y\colon I \to \mathbb{R}$ eine Lösung mit y nicht konstant 0. Dann gibt es zwei Fälle (wir machen einen Widerspruchsbeweis - man kann dies auch dadurch lösen, dass man dies durch den Ansatz von getrennten Veränderlichen zu lösen versucht; dabei muss man genau auf die Voraussetzungen in den Umformungsschritten achten):
Fall 1: Es gibt $t_1, t_2 \in I$ mit $0 \leq t_1 < t_2$, $y(t_1) = 0$ und $y(t_2) \neq 0$ derart, dass y auf $(t_1, t_2]$ das Vorzeichen $\operatorname{sgn} y(t_2)$ hat.
In dem Fall gibt es wegen dem Mittelwertsatz dann ein $t_0 \in (t_1, t_2)$ mit $\operatorname{sgn} y(t_0) = \operatorname{sgn} y(t_2)$ und

$$\operatorname{sgn} \dot{y}(t_0) = \operatorname{sgn} \frac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1} = \operatorname{sgn} y(t_2) = \operatorname{sgn} y(t_0).$$

Einsetzen von t_0 in die DGL liefert

$$\operatorname{sgn} \dot{y}(t_0) = -\operatorname{sgn} t_0 \operatorname{sgn} y(t_0) = -\operatorname{sgn} y(t_0).$$

Dies impliziert aber $\operatorname{sgn} y(t_0) = -\operatorname{sgn} y(t_0)$ und damit $y(t_0) = 0$, was nach Konstruktion nicht sein kann. Wir haben einen Widerspruch.
Fall 2: (analog zu Fall 1) Es gibt $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 < t_2 \leq 0$, $y(t_1) \neq 0$ und $y(t_2) = 0$ derart, dass y auf $[t_1, t_2)$ das Vorzeichen $\operatorname{sgn} y(t_2)$ hat.
In dem Fall gibt es wegen dem Mittelwertsatz dann ein $t_0 \in (t_1, t_2)$ mit $\operatorname{sgn} y(t_0) = \operatorname{sgn} y(t_2)$ und

$$\operatorname{sgn} \dot{y}(t_0) = \operatorname{sgn} \frac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1} = -\operatorname{sgn} y(t_1) = -\operatorname{sgn} y(t_0).$$

Einsetzen von t_0 in die DGL liefert

$$\operatorname{sgn} \dot{y}(t_0) = -\operatorname{sgn} t_0 \operatorname{sgn} y(t_0) = \operatorname{sgn} y(t_0).$$

Dies impliziert aber $\operatorname{sgn} y(t_0) = -\operatorname{sgn} y(t_0)$ und damit $y(t_0) = 0$, was nach Konstruktion nicht sein kann. Wir haben einen Widerspruch.
Warum waren dies schon alle Fälle? Nach Voraussetzung gibt es $t \neq 0$ mit $y(t) \neq 0$. Es sei s mit maximalem Betrag unter allen Zeitpunkten τ gewählt, welche $|\tau| < |t|$, $\operatorname{sgn}(\tau t) \geq 0$ und $y(\tau) = 0$ erfüllen (die Existenz eines Supremums ist klar, die Existenz des Maximums erhält man aus der Stetigkeit). Wegen dem Zwischenwertsatz gilt also $\operatorname{sgn} y(\tau) = \operatorname{sgn} y(t)$ für alle τ echt zwischen s und t. Die beiden Fälle erhält man, wenn man diese nach dem Vorzeichen von t unterscheidet.
Bemerkung: In der Aufgabe war nicht klar gestellt, ob man eine komplexe, oder eine reelle Lösung sucht. Gemeint war zwar eine reelle Lösung (wie auch in den Beispielen zur Probeklausur), da dies aber nicht deutlich war, kann man natürlich auch komplexwertige Lösungen suchen. In dem Fall gibt es mehr als nur die triviale Lösung.

Aufgabe 4 (*Globales Verhalten von Lösungen*) (10+10+10)

(a) Man beweise oder widerlege, dass $\dot{y}(t) = t \sin y(t) + 1$ mit $y(0) = 0$ eine globale Lösung besitzt.

(b) Man beweise oder widerlege, dass $\dot{y}(t) = \sin y(t) + y(t)^2 + 2$ mit $y(0) = 1$ eine globale Lösung besitzt.

(c) Es sei $y\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differenzialgleichung $y''(t) = f(y(t), y'(t))$ für ein $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Weiter existiere[1]

$$y_* = \lim_{t\to\infty} y(t) \text{ und } \lim_{t\to\infty} y'(t).$$

Man zeige, dass dann $f(y_*, 0) = 0$ gilt.

Lösung von Aufgabe 4:
ad (a): Das AWP schreibt sich in der Form $y'(t) = f(t, y(t))$ mit $y(0) = 0$, wobei $f(t, x) = t \sin x + 1$ stetig differenzierbar ist. Folglich erfüllt f die Lipschitzbedingung und ist stetig. Der Satz von Picard-Lindelöf liefert einem die Existenz und Eindeutigkeit maximaler Lösungen.
Nun sind wir in der Lage Kriterien für die Globalität von Lösungen anzuwenden (dazu braucht man Picard-Lindelöf - es ginge auch Peano, was wir aber nicht aus der Vorlesung wissen). Die Funktion f erfüllt die sublineare Abschätzung

$$|f(t, x)| \leq |t| + 1 = \alpha(t)|x| + \beta(t)$$

für $\alpha(t) = 0$ und $\beta(t) = |t| + 1$. Ein Kriterium aus der Vorlesung sagt uns aber, dass die maximale Lösung in dem Fall global ist.

[1]Die Existenz von

$$\lim_{t\to\infty} y'(t)$$

ist eigentlich nicht nötig. Ohne diese zusätzliche Voraussetzung wäre die Aussage aber relativ schwer zu beweisen.

ad (b): Das AWP schreibt sich in der Form $y'(t) = f(t, y(t))$ mit $y(0) = 1$, wobei $f(t, x) = t \sin x + x^2 + 2$ stetig differenzierbar ist. Folglich erfüllt f die Lipschitzbedingung, ist stetig und der Satz von Picard-Lindelöf liefert einem die Existenz und Eindeutigkeit maximaler Lösungen. Wir nehmen jetzt an, dass die maximale Lösung global ist und führen dies zu einem Widerspruch. Der Vergleichssatz aus der Vorlesung (hier benötigen wir Picard-Lindelöf!) impliziert, dass die globale Lösung y des AWPs minoriert wird durch die Lösung von

$$z'(t) = z(t)^2, \; z(0) = 1.$$

Die maximale Lösung dieser DGL ist aber gegeben durch $z(t) = (1-t)^{-1}$ für $t \in (-\infty, 1)$. Wir erhalten also

$$\liminf_{t \to 1-} y(t) \geq \liminf_{t \to 1-} z(t) = \infty.$$

Dies widerspricht aber der Annahme, dass y eine stetige Funktion nahe 1 ist. Das AWP hat also keine globale Lösung.

ad (c) - Dies ist Teil der versteckten Bonusaufgaben: Es ist $z\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^2$ mit

$$z(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

für $t \geq 0$ eine Lösung der DGL

$$\dot{z}(t) = g(z(t))$$

für die stetig differenzierbare Funktion

$$g(z) = \begin{pmatrix} z_2 \\ f(z_1, z_2) \end{pmatrix}.$$

Weiter existiert nach Voraussetzung

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = \begin{pmatrix} y_* \\ c \end{pmatrix}$$

für ein $c \in \mathbb{R}$. Aus der Übung schließen wir nun (nur für Systeme erster Ordnung unter den gegebenen Voraussetzungen und der stetigen Differenzierbarkeit gemacht)

$$0 = g\left(\lim_{t\to\infty} z(t)\right) = \begin{pmatrix} c \\ f(y_*, c) \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten also $c = 0$ und $f(y_*, c) = 0$. Dies ist aber die Behauptung.

Aufgabe 5 (*Multiple-Choice*) (20)

Entscheiden Sie jeweils welche Aussagen zutreffen. Geben Sie zudem eine Begründung ihrer Auswahl an (Beweis, Gegenbeispiel, Beispiel, etc.).

richtige Antwort	*+1 Punkt*
keine Antwort	*0 Punkte*
falsche Antwort	*-1 Punkt*
richtige Begründung	*+4 Punkte*

Die Geamtpunktzahl wird auf 0 Punkte aufgerundet, sollte diese negativ sein.

(a) Das AWP $\dot{y}(t) = \sqrt{|ty(t)|} + 1 + \sin y(t)$ mit $y(0) = 0$ hat mindestens eine maximale Lösung.
☐ richtig ☐ falsch

(b) Es gibt eine Differenzialgleichung der Form $\dot{y}(t) = f(y(t))$ mit der globalen Lösung $y(t) = \sin(t)$.
☐ richtig ☐ falsch

(c) Es gibt eine Differenzialgleichung der Form $\dot{y}(t) = f(y(t))$ mit der lokalen Lösung $y\colon (-1, 1) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $y(t) = \sin(t)$.
☐ richtig ☐ falsch

(d) Der Vektorraum aller globalen Lösungen von

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) + y_2(t) + 5y_3(t) \\ y_2''(t) = y_1(t) - 2y_2(t) + 5y_3(t) \\ y_3'(t) = y_1(t) + 3y_2'(t) - y_3(t) \end{cases}$$

hat die Dimension
☐ zwei. ☐ drei. ☐ vier.

Lösung von Aufgabe 5:

ad (a): Die Aussage ist **richtig**. In der Tat ist das AWP von der Form $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ mit $y(0) = 0$ für ein stetiges $f(t, x) = \sqrt{|tx|} + 1 + \sin x$. Nach dem Satz von Peano existiert also mindestens eine maximale Lösung.

ad (b): Die Aussage ist **falsch**. Wenn man $t_+ = 0$ und $t_- = \pi$ in die DGL einsetzt erhält man den Widerspruch $1 = \dot{y}(t_+) = f(0) = \dot{y}(t_-) = -1$.

ad (c): Die Aussage ist **richtig**. Diese Funktion $y\colon (-1, 1) \to \mathbb{R}$ ist, wie man leicht nachrechnet Lösung von $y'(t) = \sqrt{1 - y(t)^2}$.

ad (d): Die lineare Abbildung

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix}$$

liefert einen Isomorphismus der globalen Lösungen des gegebenen Systems mit den globalen Lösungen von

$$\begin{cases} z_1'(t) = z_1(t) + z_2(t) + 5z_3(t) \\ z_2'(t) = z_4(t) \\ z_3'(t) = z_1(t) + 3z_4(t) - z_3(t) \\ z_4'(t) = z_1(t) - 2z_2(t) + 5z_3(t). \end{cases}$$

Dieses System hat nach Vorlesung (lineares homogenens DGLSystem mit konstanten Koeffizienten; die Dimension ist dann die Größe des Systems) die Dimension 4. Ein linearer Isomorphismus ändert die Dimension nicht. Deshalb hat der Vektorraum der globalen Lösungen des ursprünglichen Problems die Dimension **vier**.