Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2014/2015

Übungsblatt 10

Evolutionsgleichungen

Abgabe ist am 7.1.2015 um 12 Uhr in der Übung

Dies ist ein Wiederholungsblatt über die Ferien

Aufgabe 1 (*C_0-Gruppen und Generatoren bestimmen*) (5+5+5*)

Es sei $T(t)f = f(\cdot + t)$ für $f \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ und $t > 0$ gegeben. Dabei ist $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ der Raum der auf $[0, 2\pi)$ quadrat-integrierbaren und 2π-periodischen Funktionen.

(a) Zeigen Sie, dass T eine C_0-Gruppe ist.
(b) Bestimmen Sie den Erzeuger A von T.
(c) Man zeige, dass A^2 eine holomorphe C_0-Halbgruppe erzeugt. Geben Sie außerdem eine explizite Formel für diese C_0-Halbgruppe an.

Aufgabe 2 (*Wohlgestellte Probleme und Störungstheorie*) (5*+10+5*)

(a) Es sei A der Operator aus Aufgabe 1 (b). Geben Sie ein Anfangsrandwertproblem an, welches zu A^2 gehört. Was können Sie mit Hilfe von Aufgabe 1 (c) über diese Problem sagen?
(b) Man beweise oder wiederlege, dass das folgende Problem wohlgestellt ist:

$$\begin{cases} u_t(t,x) = a(x)u_{xx}(t,x) + b(x)u_x(t,x) + c(x)u(t,x) & t \geq 0 \text{ und } x \in [0,1] \\ u_x(t,0) = u(t,0) & t \geq 0 \\ u_x(t,1) = -u(t,1) & t \geq 0 \\ u(0,x) = f(x) & x \in [0,1] \end{cases}$$

Dabei sind a, b, c stetige Funktionen und $a(x) > 0$ für alle $x \in [0,1]$. Weiter ist für f eine zweimal stetig differenzierbare Funktion erlaubt mit $f'(0) - f(0) = f'(1) + f(1) = 0$.

(c) Man beweise oder wiederlege, dass das folgende Problem wohlgestellt ist:

$$\begin{cases} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) & t \geq 0 \text{ und } x \in [0,1] \\ u_x(t,0) = -u_x(t,1) & t \geq 0 \\ u(0,x) = f(x) & x \in [0,1] \end{cases}$$

Hier sei $f \in C^\infty([0,1])$ mit $f'(0) = -f'(1)$.

Aufgabe 3 (*Wesentliche Definitionsbereiche und Vergleich von C_0-Halbgruppen*) (5*+10*+5*)

(a) Es sei A der Erzeuger einer C_0-Halbgruppe T. Man zeige, dass $D(A^\infty) = \{f \in X : f \in D(A^n) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$ ein wesentlicher Definitionsbereich für A ist.
Hinweis: Folgern Sie dies aus $T(t)$-Invarianz und der Dichtheit in X. Für die Dichtheit in X benutzen Sie die Folge

$$x_n = \int_0^\infty n\varphi(nt)T(t)x\,dt$$

für ein festes $\varphi \in \mathcal{D}((0,\infty))$.

Bitte wenden!

(b) Man beweise, dass es genau eine C_0-Halbgruppe T auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ mit Generator A gibt für den $Af = \Delta f$ (im schwachen Sinn) für alle $f \in D(A)$ gilt.
Hinweis: Sie haben bereits die Existenz einer solchen C_0-Halbgruppe S mit Erzeuger B gezeigt. Sie müssen nun $D(B) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) : \ \Delta f \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$ nachrechnen. Daraus folgt die Behautptung durch Vergleich der Operatoren A und B. Um die Identität für $D(B)$ zu bekommen benutzen Sie die Faltung (Falls Sie die Eigenschaften der Faltung nicht kennen sollten, dürfen Sie diese gerne in der Literatur nachschlagen und verwenden.).

(c) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene beschränkte Menge. Ist $\mathcal{D}(\Omega)$ ein wesentlicher Definitionsbereich für Δ_2^D (dies sei der Dirichlet-Laplace auf diesem Gebiet)?

Aufgabe 4 (*Invarianz von abgeschlossenen Mengen*) (5*)
In dem wohlgestellten Problem in Aufgabe 2 (b) bzw. (c) zeige oder wiederlege man (falls dieses wohlgestellt ist!), dass $u(t, \cdot) \geq 0$ für alle $t \geq 0$ gilt, falls $f \geq 0$ ist.

Aufgabe 5 (***Für Interessierte:*** *Eine einfache Schrödingergleichung III*[1]) (10*)
Ziel der Aufgabe ist es einen physikalisch anschaulichen Beweis für den **Satz von Hörmander** zu geben. Dazu sei S die Schrödingerhalbgruppe definiert auf Blatt 8 Aufgabe 3 oder Blatt 9 Aufgabe 3. Der Satz von Hörmander besagt, dass für alle $t \neq 0$ der Operator $S(t)$ nicht beschränkt ist in der $L^p(\mathbb{R})$-Norm, wobei $p \in [1, \infty]\backslash\{2\}$ ist. Beweisen Sie nun diesen Satz indem Sie analog vorgehen wie auf Blatt 9 Aufgabe 3(a).
Hinweis: Benutzen Sie den Startwert (siehe Blatt 9 Aufgabe 3 (a))

$$f = \sum_{k=0}^{N} \exp\left(-y^2 - 2ip_k y\right)$$

für p_k geeignet. Zeigen Sie dann, dass $\|S(t)f\|_p \geq C\sqrt[p]{N}$ $(t \neq 0)$ für ein $C > 0$ und

$$\|f\|_p \leq \|f\|_1^{2/p-1} \|f\|_2^{2-2/p} \leq c\sqrt{N}$$

für ein $c > 0$ gilt. Daraus folgt die Behauptung für $p \in [1, 2)$. Der Fall $p > 2$ folgt aus Dualitätsgründen.

[1] Diese Aufgabe wird in der Übung nicht besprochen.