ulm university universität uulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2014/2015

# Übungsblatt 12

## Evolutionsgleichungen

Abgabe ist am 21.1.2015 um 12 Uhr in der Übung

**Aufgabe 1** (*Ein Differentialoperator 4. Ordnung*) (5+15*)

(a) Wir fassen $Af = -f''''$ auf als Operator auf $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ mit Definitionsbereich $D(A) = H^4(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Man zeige, dass $A$ eine holomorphe $C_0$-Halbgruppe erzeugt.

(b) Man finde einen Erzeuger $B$ einer holomorphen $C_0$-Halbgruppe auf $L^2((0,1);\mathbb{C})$ mit $D(B) \subset H^4((0,1);\mathbb{C})$ und $Bf = -f''''$. Man beweise zudem, dass der von ihnen gefundene Operator eine $C_0$-Halbgruppe erzeugt.

**Aufgabe 2** (*Invarianz durch Formen*) (10+5+15*)

Entscheiden und beweisen Sie, welche der Operatoren $C_0$-Halbgruppen $T$ erzeugen, die positiv[1], kontraktiv[2], bzw. submarkovsch[3] sind.

(a) Man betrachte den Operator $A + 2$, wobei $A$ aus Aufgabe 1 ist.

(b) Der Operator $A$ sei assoziiert zu der stetigen und $H$-elliptischen Form (dies müssen Sie nicht beweisen)

$$a\colon V \times V \to \mathbb{C}, \quad a(u,v) = \int_0^1 u'\overline{v}'\, d\lambda + \beta_0 u(0)\overline{v(0)} + \beta_1 u(1)\overline{v(1)}.$$

Dabei seien $\beta_0, \beta_1 \in \mathbb{R}$ und $H = L^2((0,1),\mathbb{C})$. Der Definitionsbereich ist dabei $V = H^1((0,1);\mathbb{C})$.

(c) Der zu dem Problem

$$\begin{cases} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) + x u_x(t,x) & (t > 0, x \in [0,1]) \\ u_x(t,1) = 0 & (t > 0) \\ u_x(t,0) = 0 & (t > 0) \\ u(0,x) = f(x) & (x \in [0,1]) \end{cases}$$

gehörende Operator $A$ auf $H = L^2((0,1))$.

[1] $T(t)f \geq 0$, falls $f \geq 0$
[2] $\|T(t)\|_2 \leq 1$
[3] $T(t)f \leq 1$, falls $f \leq 1$

**Bitte wenden!**

**Aufgabe 3** (*Multiple-Choice*) (20*)

Wenn in einer Teilaufgabe alle Kreuze richtig gesetzt sind (mehrfache Auswahl möglich) gibt es +2 und für jede falsche Teilaufgabe (ein Kreuz falsch gesetzt reicht) −2 Punkte. Die Gesammtsumme wird auf 0 aufgerundet, wenn diese negativ sein sollte.

*Bemerkung:* Die Teilaufgaben haben teilweise deutlich verschiedene Schwierigkeit und sind nicht nach Schwierigkeit geordnet!

(a) Es sei $\Omega$ eine offene beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $A = \Delta_2^N$ der Neumann-Laplace auf $L^2(\Omega)$. Die folgenden Mengen sind wesentliche Definitionsbereiche
□ $\mathcal{D}(\Omega)$ □ $D(A)$ □ $D(A^2)$

(b) Der Erzeuger der Translationshalbgruppe aus den Linksschifts auf $C_0([0,1))$ hat den Definitionsbereich $C^1([0,1)) \cap C_0([0,1))$
□ wahr □ falsch

(c) Ist $A$ der Erzeuger einer kontraktiven $C_0$-Gruppe, dann ist $A^2$ Erzeuger einer
□ $C_0$-Gruppe □ kontraktiven $C_0$-Halbgruppe □ holomorphen $C_0$-Halbgruppe

(d) Erzeugt $A$ eine kontraktive holomorphe $C_0$-Halbgruppe auf dem Sektor $\Sigma_{\pi/2}$, dann erzeugen $\pm iA$ eine kontrakive $C_0$-Gruppe. Ist umgekehrt $iA$ der Erzeuger einer kontraktiven $C_0$-Gruppe, dann ist $A$ oder $-A$ der Erzeuger einer holomorphen $C_0$-Halbgruppe.
□ erste Aussage ist wahr □ zweite Aussage ist wahr □ beide sind falsch

(e) Auf folgenden Räumen gibt es einen Erzeuger $A$ einer $C_0$-Halbgruppe mit $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset D(A)$ und $A\varphi = \Delta\varphi$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:
□ $L^1(\mathbb{R}^n)$ □ $L^2(\mathbb{R}^n)$ □ $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ □ $C_0(\mathbb{R}^n)$ □ $C_b(\mathbb{R}^n)$ □ $C_{ub}(\mathbb{R}^n)$

(f) Es sei $T$ eine $C_0$-Halbgruppe auf einem Hilbertraum. Weiter sei $A$ der Erzeuger von $T$. Dann erzeugt $A^*$ die $C_0$-Halbgruppe $S$ mit $S(t)^* = T(t)$ für alle $t \geq 0$.
□ $S(t)^* = T(t)$ i.A. falsch aber $A^*$ erzeugt eine $C_0$-Halbgruppe □ Die Aussage ist falsch
□ Die Aussage ist wahr

(g) Die Menge $M = \{\alpha \in \mathbb{C} : \text{ der Abschluss von } \alpha A \text{ erzeugt eine } C_0\text{-Halbgruppe}\}$ kann folgende Gestallt annehmen ($A$ ein dicht-definiert Operator auf $X$):
□ $\emptyset$ □ $\{0\}$ □ Ursprungsgerade oder -halbgerade □ $\overline{\Sigma_\theta} \supset M \supset \Sigma_\theta \cup \{0\}$
□ Sektor mit Winkel zwischen $\pi/2$ und $\pi$ □ weitere noch nicht aufgelistete Formen

(h) Man betrachte die Wohlgestelltheit (auf dem Raum der stetigen Funktionen - klassische Ableitung und stetige Abhängigkeit in der Supremumsnorm) der folgenden Probleme (für $f$ in einer geeigneten dichten Teilmenge der stetigen Funktionen)

$$\begin{cases} u_t(t,x) = \alpha u_{xx}(t,x) & (t \geq 0, x \in \mathbb{R}) \\ \lim_{x\to\infty} u(t,x) = 0 & (t \geq 0) \\ \lim_{x\to-\infty} u(t,x) = 0 & (t \geq 0) \\ u(0,x) = f(x) & (x \in [0,1]) \end{cases} \qquad \begin{cases} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) - u_x(t,x) & (t \geq 0, x \in [0,1]) \\ u_x(t,0) = 0 & (t \geq 0) \\ u(0,x) = f(x) & (x \in [0,1]) \end{cases}$$

□ Das zweite Problem ist wohlgestellt □ Das erste Problem ist wohlgestellt für $\alpha > 0$
□ Das erste Problem ist wohlgestellt für $\operatorname{Re}\alpha \geq 0$ □ Das erste Problem ist wohlgestellt für $\operatorname{Re}\alpha > 0$

(i) Es sei $A$ auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ gegeben durch $D(A) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \Delta(m \cdot u) \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$ mit $Au = m^{-1}\Delta(m \cdot u)$. Der Operator $A$ erzeugt für jede messbare und beschränkte Funktion $m\colon \mathbb{R}^n \to [1,\infty)$ eine
□ quasi-kontraktive $C_0$-Halbgruppe □ $C_0$-Halbgruppe
□ holomorphe $C_0$-Halbgruppe

(j) Es sei $A$ der Operator der vorigen Teilaufgabe. Dann gibt es stets eine stetige und $H$-elliptische Form $a$ deren assoziierter Operator $-A$ ist ($H = L^2(\mathbb{R}^n)$).
□ wahr □ falsch