



Übungsblatt 13 Evolutionsgleichungen

Abgabe ist am 28.1.2015 um 12 Uhr in der Übung

Aufgabe 1 (*Asymptotik für Halbgruppen erzeugt von Multiplikationsoperatoren*) (5+10*+5*)
 $A = M_m$ sei der Multiplikationsoperator (siehe Blatt 3) auf $X = L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ für $p = [1, \infty)$ und m sei so gewählt, dass A eine C_0 -Halbgruppe T erzeugt. Wir wollen nun das asymptotische Verhalten von T verstehen. Abhängig vom Wert $\omega(T)$ ist die Situation unterschiedlich. Der Fall $\omega(T) < 0$ impliziert gleichmäßige (im Anfangswert) Konvergenz von $T(t)$. Unklarer ist dies bereits im Fall $\omega(T) > 0$, wenn man sich für punktweises Verhalten (für festen Anfangswert) interessiert, was aber hier nicht Thema sein soll. Der Fall $\omega(T) = 0$ ist besonders schwierig. Hier könnte man erwarten, dass eventuell $T(t)f$ für $t \rightarrow \infty$ konvergiert. Dies ist aber nicht immer der Fall. Stattdessen existiert nur der Grenzwert im Cesàro-Mittel

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \int_0^t T(s)f \, ds.$$

Es sei noch darauf hingewiesen, dass aus der Existenz des klassischen Grenzwertes bereits die Konvergenz im Cesàro-Mittel folgt und die Grenzwerte identisch sind.

- (a) Man berechne $s(A)$ und $\omega(T)$.
 (b) Es sei nun $\omega(T) = 0$. Man zeige, dass ($f \in X$)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \int_0^t T(s)f \, ds = f \mathbf{1}_{\{m=\omega(T)\}}$$

gilt.

- (c) Es sei nun wieder $\omega(T) = 0$ unter welchen Voraussetzungen an m existiert

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T(t)f$$

für alle $f \in X$ (ohne Beweis)?

Aufgabe 2 (*Verhalten für $\omega(T) = 0$*) (10+15*+5)

Es sei T eine von A erzeugte C_0 -Halbgruppe auf X . In den folgenden Beispielen untersuche man, ob $T(\cdot)x$ beschränkt ist für alle $x \in X$, ob $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t)x$ für alle $x \in X$ existiert und gebe gegebenenfalls den Grenzwert in Abhängigkeit von x an.

- (a) $A = \Delta_2^N$ für eine beschränkte offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.
 (b) $Af = \Delta f$ mit geeignetem Definitionsbereich auf $X = L^p(\mathbb{R}^n)$ ($p \in [1, \infty)$).
 (c) $Af = -f'$ mit $D(A) = H_0^1((1, \infty), xdx)$ auf $X = L^2((1, \infty), xdx)$.

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (*Multiple-Choice*)

(20*)

Wenn in einer Teilaufgabe alle Kreuze richtig gesetzt sind (mehrfache Auswahl möglich) gibt es +2 und für jede falsche Teilaufgabe (ein Kreuz falsch gesetzt reicht) -2 Punkte. Die Gesamtsumme wird auf 0 aufgerundet, wenn diese negativ sein sollte.

Bemerkung: Die Teilaufgaben haben teilweise deutlich verschiedene Schwierigkeit und sind nicht nach Schwierigkeit geordnet!

- (a) Es sei A ein Operator auf X . Dann definieren $\|x\|_1 = \|x\|_X + \|Ax\|_X + \|A^2x\|_X$ und $\|x\|_2 = \|x\|_X + \|A^2x\|_X$ zwei äquivalente Normen auf $D(A^2)$, falls
 \bar{A} existiert und eine C_0 -Halbgruppe erzeugt A abgeschlossen ist $\rho(A) \neq \emptyset$ gilt
- (b) Für folgende Definitionsbereiche erzeugt $A_1f = f'$ bzw. $A_2f = -f'$ eine C_0 -Halbgruppe auf $L^2(0, \infty)$:
 $D(A_1) = H^1(0, \infty)$ $D(A_1) = H_0^1(0, \infty)$ $D(A_2) = H^1(0, \infty)$ $D(A_2) = H_0^1(0, \infty)$
- (c) Es sei A der Erzeuger einer C_0 -Halbgruppe T auf X . Dann gilt für $t > 0$

$$T(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(nt^{-1} R(nt^{-1}, A) \right)^n$$

- in der starken Topologie (punktweise Konvergenz) in der Normtopologie (gleichmäßige Konvergenz) beides falsch
- (d) Ein dicht-definierte Operator A erzeugt genau dann eine kontraktive und positive C_0 -Halbgruppe auf $L^2(\Omega, \mathbb{K})$ (Ω ein Maßraum), wenn $\operatorname{Re}(Af|f^+) \leq 0$ für alle $f \in D(A)$ gilt, und $\lambda - A$ surjektiv für ein $\lambda \geq 0$ ist.
 richtig für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ richtig für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ falsch
- (e) Ein dicht-definierte Operator A erzeugt genau dann eine kontraktive und positive C_0 -Halbgruppe auf $C_0(\Omega)$ (Ω ein lokal kompakter Hausdorff-Raum), wenn $(Af)(x) \leq 0$ für alle $f \in D(A)$ mit $f(x) = \max f > 0$ gilt, und $\lambda - A$ surjektiv für ein $\lambda \geq 0$ ist.
 richtig falsch
- (f) Ein Erzeuger A einer kontraktiven C_0 -Gruppe ($\|T(t)\| \leq 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$) auf einem Hilbertraum H ist
 schief-adjungiert selbstadjungiert nur dann der Erzeuger einer holomorphen C_0 -Halbgruppe, wenn $D(A) = H$ gilt
- (g) Es sei A der Erzeuger einer C_0 -Halbgruppe T dann gilt $s(A) = \omega(T)$
 immer falls $\sigma(T(1)) \subset e^{\sigma(A)}$ falls $\sigma(T(1)) \supset e^{\sigma(A)}$
 falls A eine holomorphe C_0 -Halbgruppe erzeugt
- (h) Ist T eine C_0 -Halbgruppe auf X und A der Erzeuger von T , dann ist $x \in D(A^n)$ (für $n \in \mathbb{N}$) äquivalent mit
 $T(\cdot)x$ ist in $t = 0$ n -mal differenzierbar $T(\cdot)x$ ist auf $[0, \infty)$ n -mal stetig differenzierbar
 $T(\cdot)x$ ist auf $(0, \infty)$ n -mal differenzierbar
- (i) Ist T eine C_0 -Halbgruppe auf X und A der Erzeuger von T , dann gilt
 $D(A^\infty)$ ist dicht in X A ist abgeschlossen $\rho(A) \neq \emptyset$ Für jede Folge $\lambda_n \in \rho(A)$ ist $\lambda_n R(\lambda_n, A)$ beschränkt, falls $\operatorname{Re} \lambda_n \rightarrow \infty$
- (j) Eine C_0 -Halbgruppe T auf $L^2(\Omega)$ mit Erzeuger A ist positiv, falls
 $\operatorname{Re}(Af|f^+) \leq 0$ für alle $f \in D(A)$ gilt $T(t)f \leq 1$ für alle $t \geq 0$ und alle $f \leq 1$
 $R(\lambda, A)f \geq 0$ für $\lambda \in \rho(A) \cap \mathbb{R}$ groß genug und alle $f \geq 0$ gilt.