Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2014/2015

Übungsblatt 13

Evolutionsgleichungen

Abgabe ist am 28.1.2015 um 12 Uhr in der Übung

Aufgabe 1 (*Asymptotik für Halbgruppen erzeugt von Multiplikationsoperatoren*) (5+10*+5*)
$A = M_m$ sei der Multiplikationsoperator (siehe Blatt 3) auf $X = L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ für $p = [1, \infty)$ und m sei so gewählt, dass A eine C_0-Halbgruppe T erzeugt. Wir wollen nun das asymptotische Verhalten von T verstehen. Abhängig vom Wert $\omega(T)$ ist die Situation unterschiedlich. Der Fall $\omega(T) < 0$ impliziert gleichmäßige (im Anfangswert) Konvergenz von $T(t)$. Unklarer ist dies bereits im Fall $\omega(T) > 0$, wenn man sich für punktweises Verhalten (für festen Anfangswert) interessiert, was aber hier nicht Thema sein soll. Der Fall $\omega(T) = 0$ ist besonders schwierig. Hier könnte man erwarten, dass eventuell $T(t)f$ für $t \to \infty$ konvergiert. Dies ist aber nicht immer der Fall. Stattdessen existiert nur der Grenzwert im Cesàro-Mittel

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1} \int_0^t T(s)f\, ds.$$

Es sei noch darauf hingewiesen, dass aus der Existenz des klassischen Grenzwertes bereits die Konvergenz im Cesàro-Mittel folgt und die Grenzwerte identisch sind.

(a) Man berechne $s(A)$ und $\omega(T)$.
Hinweis: Wir haben bereits $\sigma(M_m)$ berechnet und es gilt $s(A) = \omega(T)$.

(b) Es sei nun $\omega(T) = 0$. Man zeige, dass ($f \in X$)

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1} \int_0^t T(s)f\, ds = f\mathbb{1}_{\{m=\omega(T)\}}$$

gilt.
Hinweis: Benutzen Sie den Satz von der dominierten Konvergenz. Dahinter verbirgt sich ein allgemeiner Satz, der **Mittelergodensatz**.

(c) Es sei nun wieder $\omega(T) = 0$ unter welchen Voraussetzungen an m existiert

$$\lim_{t\to\infty} T(t)f$$

für alle $f \in X$ (ohne Beweis)?

Aufgabe 2 (*Verhalten für* $\omega(T) = 0$) (10+15*+5)
Es sei T eine von A erzeugte C_0-Halbgruppe auf X. In den folgenden Beispielen untersuche man, ob $T(\cdot)x$ beschränkt ist für alle $x \in X$, ob $\lim_{t\to\infty} T(t)x$ für alle $x \in X$ existiert und gebe gegebenenfalls den Grenzwert in Abhängigkeit von x an.

(a) $A = \Delta_2^N$ für eine beschränkte offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.
Hinweis: Es reicht wenn Sie den Fall $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ behandeln (der allgemeine Fall erfordert den Spektralsatz oder ähnlich tiefe Einsichten). Wir erwarten, dass $T(t)x$ für $t \to \infty$ gegen eine konstante Funktion konvergiert.

(b) $Af = \Delta f$ mit geeignetem Definitionsbereich auf $X = L^p(\mathbb{R}^n)$ ($p \in [1, \infty)$).
Hinweis: Man zeige $\|T(t)f\|_1 = \|f\|_1$ für $f \geq 0$ sowie $\|T(t)f\|_p \to 0$ für $t \to \infty$ im Falle $p \neq 1$. Man beachte, dass wir eine explizite Formel für T haben!

(c) $Af = -f'$ mit $D(A) = H_0^1((1, \infty), x\mathrm{d}x)$ auf $X = L^2((1, \infty), x\mathrm{d}x)$.

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (*Multiple-Choice*) (20*)

Wenn in einer Teilaufgabe alle Kreuze richtig gesetzt sind (mehrfache Auswahl möglich) gibt es $+2$ und für jede falsche Teilaufgabe (ein Kreuz falsch gesetzt reicht) -2 Punkte. Die Gesammtsumme wird auf 0 aufgerundet, wenn diese negativ sein sollte.

Bemerkung: Die Teilaufgaben haben teilweise deutlich verschiedene Schwierigkeit und sind nicht nach Schwierigkeit geordnet!

(a) Es sei A ein Operator auf X. Dann definieren $\|x\|_1 = \|x\|_X + \|Ax\|_X + \|A^2x\|_X$ und $\|x\|_2 = \|x\|_X + \|A^2x\|_X$ zwei äquivalente Normen auf $D(A^2)$, falls
□ $\overline{A}$ existiert und eine C_0-Halbgruppe erzeugt □ A abgeschlossen ist □ $\rho(A) \neq \emptyset$ gilt

(b) Für folgende Definitionsbereiche erzeugt $A_1 f = f'$ bzw. $A_2 f = -f'$ eine C_0-Halbgruppe auf $L^2(0,\infty)$:
□ $D(A_1) = H^1(0,\infty)$ □ $D(A_1) = H^1_0(0,\infty)$ □ $D(A_2) = H^1(0,\infty)$ □ $D(A_2) = H^1_0(0,\infty)$

(c) Es sei A der Erzeuger einer C_0-Halbgruppe T auf X. Dann gilt für $t > 0$

$$T(t) = \lim_{n\to\infty} \Big(nt^{-1}R(nt^{-1}, A)\Big)^n$$

□ in der starken Topologie (punktweise Konvergenz) □ in der Normtopologie (gleichmäßige Konvergenz) □ beides falsch

(d) Ein dicht-definierte Operator A erzeugt genau dann eine kontraktive und positive C_0-Halbgruppe auf $L^2(\Omega,\mathbb{K})$ (Ω ein Maßraum), wenn $\operatorname{Re}(Af|f^+) \leq 0$ für alle $f \in D(A)$ gilt, und $\lambda - A$ surjektiv für ein $\lambda \geq 0$ ist.
□ richtig für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ □ richtig für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ □ falsch

(e) Ein dicht-definierte Operator A erzeugt genau dann eine kontraktive und positive C_0-Halbgruppe auf $C_0(\Omega)$ (Ω ein lokal kompakter Hausdorff-Raum), wenn $(Af)(x) \leq 0$ für alle $f \in D(A)$ mit $f(x) = \max f > 0$ gilt, und $\lambda - A$ surjektiv für ein $\lambda \geq 0$ ist.
□ richtig □ falsch

(f) Ein Erzeuger A einer kontraktiven C_0-Gruppe ($\|T(t)\| \leq 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$) auf einem Hilbertraum H ist
□ schief-adjungiert □ selbstadjungiert □ nur dann der Erzeuger einer holomorphen C_0-Halbgruppe, wenn $D(A) = H$ gilt

(g) Es sei A der Erzeuger einer C_0-Halbgruppe T dann gilt $s(A) = \omega(T)$
□ immer □ falls $\sigma(T(1)) \subset e^{\sigma(A)}$ □ falls $\sigma(T(1)) \supset e^{\sigma(A)}$
□ falls A eine holomorphe C_0-Halbgruppe erzeugt

(h) Ist T eine C_0-Halbgruppe auf X und A der Erzeuger von T, dann ist $x \in D(A^n)$ (für $n \in \mathbb{N}$) äquivalent mit
□ $T(\cdot)x$ ist in $t = 0$ n-mal differenzierbar □ $T(\cdot)x$ ist auf $[0,\infty)$ n-mal stetig differenzierbar
□ $T(\cdot)x$ ist auf $(0,\infty)$ n-mal differenzierbar

(i) Ist T eine C_0-Halbgruppe auf X und A der Erzeuger von T, dann gilt
□ $D(A^\infty)$ ist dicht in X □ A ist abgeschlossen □ $\rho(A) \neq \emptyset$ □ Für jede Folge $\lambda_n \in \rho(A)$ ist $\lambda_n R(\lambda_n, A)$ beschränkt, falls $\operatorname{Re}\lambda_n \to \infty$

(j) Eine C_0-Halbgruppe T auf $L^2(\Omega)$ mit Erzeuger A ist positiv, falls
□ $\operatorname{Re}(Af|f^+) \leq 0$ für alle $f \in D(A)$ gilt □ $T(t)f \leq 1$ für alle $t \geq 0$ und alle $f \leq 1$
□ $R(\lambda, A)f \geq 0$ für $\lambda \in \rho(A) \cap \mathbb{R}$ groß genug und alle $f \geq 0$ gilt.