



Übungsblatt 14 Evolutionsgleichungen

Abgabe ist am 4.2.2015 um 12 Uhr in der Übung

Aufgabe 1 (*Wohlgestelltheit mit periodischen zeitlichen Randbedingungen*) (3*+2*+10)
Es sei A der Erzeuger einer C_0 -Halbgruppe T .

- (a) Unter welcher Voraussetzung an T existiert mindestens eine milde Lösung $u \in C([0, 1]; X)$ von $\dot{u} = Au + f$ mit $u(0) = u(1)$ für alle $f \in L^1((0, 1); X)$ (ohne Beweis)?
- (b) Unter welcher Voraussetzung an T existiert höchstens eine milde Lösung $u \in C([0, 1]; X)$ von $\dot{u} = Au + f$ mit $u(0) = u(1)$ für alle $f \in L^1((0, 1); X)$ (ohne Beweis)?
- (c) Unter den Voraussetzungen von (a) und (b) hängt die Lösung dann stetig von f ab. Mit anderen Worten man zeige, dass die Abbildung

$$L^1((0, 1); X) \ni f \mapsto u_f \in C([0, 1]; X)$$

stetig ist. Dabei ist u_f die eindeutige Lösung von $\dot{u} = Au + f$ auf $[0, 1]$ mit $u(0) = u(1)$.

Aufgabe 2 (*Verklebung milder Lösungen*) (5+5*+5)

Es sei A der Erzeuger einer C_0 -Halbgruppe T und $f \in L^1(\mathbb{R}; X)$ wir untersuchen das Problem $\dot{u}(t) = Au(t) + f(t)$ für $t \in \mathbb{R}$ in geeigneten Teilintervallen.

- (a) Es seien $u: I \rightarrow X$ und $v: J \rightarrow X$ milde Lösungen des obigen Problems mit $I \cap J = \{t_0\}$, wobei t_0 der rechte Endpunkt von I und der linke von J ist, und $u(t_0) = v(t_0)$. Man zeige, dass dann $t \mapsto u(t)\mathbb{1}_I(t) + v(t)\mathbb{1}_{J \setminus \{t_0\}}(t)$ wieder eine milde Lösung des obigen Problems auf $I \cup J$ ist.
- (b) Ist die Aussage in (a) auch richtig für klassische¹ Lösungen? Man beweise diese Aussage oder gebe ein Gegenbeispiel.
- (c) Es sei $u: [0, 1] \rightarrow X$ eine milde Lösung des obigen Problems mit $u(0) = u(1)$ und f sei 1-periodisch. Man zeige, dass die periodische Fortsetzung von u eine milde Lösung des obigen Problems auf \mathbb{R} definiert.

Aufgabe 3 (*Wohlgestelltheit und milde Lösungen*) (5*+10*+15*)

Es sei A ein dicht-definiert abgeschlossener Operator auf X . Dann sind äquivalent

- (i) A erzeugt eine C_0 -Halbgruppe auf X
- (ii) für jedes $x \in X$ gibt es genau eine milde Lösung $u_x \in C([0, \infty); X)$ von $\dot{u}(t) = Au(t)$ für $t \geq 0$ mit $u(0) = x$.

Weiter ist dann die von A erzeugte C_0 -Halbgruppe T gegeben durch $T(t)x = u_x(t)$ ($x \in X, t > 0$). Dies wollen wir hier zeigen.

- (a) Zeigen Sie (i) \Rightarrow (ii).
- (b) Wir nehmen an, dass (ii) gilt und setzen $T(t)x = u_x(t)$. Man zeige, dass T eine C_0 -Halbgruppe erzeugt.
- (c) Man zeige, dass A der Erzeuger von T in (b) ist.

¹In dem Sinne, dass u differenzierbar ist und $\dot{u} = Au + f$ in L^1 gilt.

Aufgabe 4 (Multiple-Choice)

(10*)

Wenn in einer Teilaufgabe alle Kreuze richtig gesetzt sind (mehrfache Auswahl möglich) gibt es +2 und für jede falsche Teilaufgabe (ein Kreuz falsch gesetzt reicht) -2 Punkte. Die Gesamtsumme wird auf 0 aufgerundet, wenn diese negativ sein sollte.

Bemerkung: Die Teilaufgaben haben teilweise deutlich verschiedene Schwierigkeit und sind nicht nach Schwierigkeit geordnet!

- (a) Es sei A der Erzeuger einer C_0 -Halbgruppe T , dann gilt
- $\sigma(T(1)) \supset e^{\sigma(A)}$
 - $\sigma_p(T(1)) \setminus \{0\} = \sigma_p(A)$
 - $\sigma(A) = \sigma(A') = \sigma_{\text{ap}}(A) \cup \sigma_{\text{ap}}(A')$
 - $\partial\sigma(A) \subset \sigma_{\text{ap}}(A)$
- (b) Es sei T eine C_0 -Halbgruppe mit Erzeuger A .
- für alle $\lambda > \omega(T)$ existiert $M \geq 1$ mit $\|T(t)\| \leq Me^{\lambda t}$
 - $\|T(t)\| \leq Me^{\omega(T)t}$ für ein $M \geq 1$, falls A eine holomorphe C_0 -Halbgruppe erzeugt
 - Es gibt ein $\lambda \in \sigma(A)$ mit $\text{Re } \lambda = s(A)$, falls T schließlich normstetig ist.
- (c) Es sei T eine C_0 -Halbgruppe mit Erzeuger A auf einem Banachraum X .
- A' erzeugt eine C_0 -Halbgruppe auf X'
 - A' erzeugt eine C_0 -Halbgruppe auf X' , falls X reflexiv ist.
 - A' erzeugt eine C_0 -Halbgruppe, falls X ein Hilbertraum ist
- (d) Es sei $H = \ell^2([0, 1])$ und $(e_t)_{t \in [0, 1]}$ die kanonische ONB. Weiter sei $f: [0, 1] \rightarrow H$ gegeben durch $f(t) = e_t$ für alle $t \in [0, 1]$.
- f ist messbar.
 - $x' \circ f$ ist messbar für alle $x' \in H'$
 - f ist Riemann-integrierbar
- (e) Es sei T eine C_0 -Halbgruppe auf X und es gelte $\|T(\cdot)x\|_{L^p((0, \infty); X)} < \infty$ für alle $x \in X$. Dann gilt
- $\omega(T) < 0$, falls $p \in [1, \infty)$
 - $\omega(T) < 0$, falls $p = \infty$
 - $\omega(T) \leq 0$, falls $p = \infty$