Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2014/2015

Übungsblatt 1

Evolutionsgleichungen

Abgabe ist am 22.10.2014 um 12 Uhr in der Übung

Es gibt eine Version mit und eine ohne Hinweise (beide sind online verfügbar)!

Aufgabe 1 (*Translationshalbgruppen*) (3+5)

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes nicht-triviales Interval. Wir betrachten die Abbildung $T\colon (0,\infty) \to \mathcal{L}(L^p(I))$. Dabei ist

$$T(t)\colon L^p(I) \to L^p(I)$$

auf $L^p(I)$ für $p \in [1,\infty]$ definiert durch

$$(T(t)f)(s) := \begin{cases} f(t+s) & \text{, falls } t+s \in I \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

für fast alle $s \in I$. Man zeige, dass

(a) T **keine** C_0-Halbgruppe für $p = \infty$ ist.

(b) T eine C_0-Halbgruppe für $p < \infty$ definiert.
Hinweis: Man zeige $\lim_{t \to 0+} \|T(t)f - f\|_p = 0$ zuerst für stetige f mit kompaktem Träger in I und benutze das Gleichstetigkeitslemma.

Aufgabe 2 (*Ähnliche und quasi-kontraktive C_0-Halbgruppen*) (3+5*+3)

(a) Es seien X, Y Banachräume, $S\colon X \to Y$ ein bijektiver beschränkter Operator, und $T\colon (0,\infty) \to \mathcal{L}(X)$ eine C_0-Halbgruppe auf X. Man zeige, dass $(0,\infty) \ni t \mapsto ST(t)S^{-1}$ eine C_0-Halbgruppe auf Y definiert.

(b) Man gebe eine C_0-Halbgruppe auf $L^p(I)$ (mit $p \in [1,\infty)$) für ein Interval $I \subset \mathbb{R}$ an, die nicht quasi-kontraktiv[1] ist.
Hinweis: Man benutze zur Konstruktion Teilaufgabe (a), wobei T eine Translationshalbgruppe und S ein geeigneter Multiplikationsoperator ist.

(c) Man zeige, dass die C_0-Halbgruppe $(0,\infty) \ni t \mapsto e^{tA}$ für einen beschränkten Operator $A\colon X \to X$ quasi-kontraktiv ist.

[1] Man nennt eine C_0-Halbgruppe $T\colon (0,\infty) \to \mathcal{L}(X)$ **quasi-kontraktiv**, falls es ein $\omega \in \mathbb{R}$ gibt mit $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$ für alle $t > 0$.

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (*Multiplikationshalbgruppen*) (4+5*+2)

Es sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $p \in [1, \infty]$. Weiter sei $m\colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine messbare Abbildung mit

$$\operatorname{Re} m(x) \leq C$$

für ein $C > 0$ und μ-fast alle $x \in \Omega$. Wir definieren die Abbildung

$$T\colon (0, \infty) \to \mathcal{L}(L^p(\Omega, \Sigma, \mu)), \quad T\colon t \mapsto T(t) = M_{\exp(tm)}.$$

Dabei ist $M_{\exp(tm)}$ der Multiplikationsoperator zu $\exp(tm)$, d.h.

$$(T(t)f)(x) := \left(M_{\exp(tm)} f\right)(x) := \exp(tm(x)) f(x)$$

für μ-fast alle $x \in \Omega$. Man zeige, dass

(a) T nur dann eine C_0-Halbgruppe für $p = \infty$ definiert, wenn m in $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ liegt.

(b) T eine C_0-Halbgruppe für $p < \infty$ definiert.
Hinweis: Man benutze das Gleichstetigkeitslemma und zeige $\lim_{t \to 0+} \|T(t)f - f\|_p = 0$ nur für Funktionen f auf deren Träger m beschränkt ist.

(c) T eine quasi-kontraktive C_0-Halbgruppe ist, falls $p < \infty$ ist.