ulm university universität ulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2014/2015

Übungsblatt 2

Evolutionsgleichungen

Abgabe ist am 29.10.2014 um 12 Uhr in der Übung

Aufgabe 1 (*Erzeuger der Translationshalbgruppe auf* $C_0([0,1))$) (5)
Es sei

$$T(t)\colon C_0([0,1)) \to C_0([0,1))$$

auf $C_0([0,1))$ der Linksschift um t, d.h.

$$(T(t)f)\,(s) := \begin{cases} f(t+s) & \text{, falls } t+s \in [0,1) \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

für alle $s \in [0,1)$ und alle $f \in C_0([0,1))$. Dann definiert $(T(t))_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe auf $C_0([0,1))$ (dies müssen Sie nicht zeigen!). Man bestimme den Generator A von $(T(t))_{t\geq 0}$.
Hinweis: Der Generator $A\colon D(A) \to C_0([0,1))$ ist gegeben durch

$$Af = f'$$

für alle f aus

$$D(A) = \left\{ f \in C^1([0,1]) : \; f'(1) = f(1) = 0 \right\}.$$

Man kann durch direkte Rechnung mit dem Mittelwertsatz oder mit der Allerweltsformel leicht zeigen, dass alle $f \in D(A)$ im Definitionsbereich des Generators liegen und dieser den Wert Af hat.
Dass alle f aus dem Definitionsbereich des Generators bereits in $D(A)$ liegen rechnet man leicht über die Definition des Generators nach.

Aufgabe 2 (*Invarianz des Riemann-Integrals für abgeschlossene konvexe Mengen*) (3)
Es sei X ein Banachraum und $f\colon [a,b] \to X$ eine Riemann-integrierbare Funktion mit Werten in einer abgeschlossenen konvexen Menge $C \subset X$. Man zeige, dass dann auch

$$\left(\int_a^b g(t)dt \right)^{-1} \int_a^b g(t) f(t)\, dt$$

in C liegt für jede Riemann-integrerbare Funktion $g\colon [a,b] \to (0,\infty)$.
Bemerkung: Diese Aussage stimmt dann natürlich auch, wenn man uneigentliche Riemann-Integrale benutzt und voraussetzt, dass beide uneigentlichen Riemann-Integrale existieren.

Aufgabe 3 (*Die Graphen linearer Operatoren*) (2+2+2+2+5*)
Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Dann ist in natürlicher Weise auch $(X \times X, \|\cdot\|_{X\times X})$ mit $\|(x,y)\|_{X\times X} := \|x\| + \|y\|$ ein Banachraum. Man zeige folgende Aussagen:

(a) Es sei U ein Untervektorraum von $X \times X$. Dann gibt es genau dann einen Operator $A\colon D(A) \to X$ dessen Graph U ist, wenn $(0,x) \in U$ bereits $x = 0$ impliziert.

(b) Es sei $A\colon D(A) \to X$ ein Operator. Dann ist $(D(A), \|\cdot\|_A)$ ein normierter Raum. Dabei ist $\|x\|_A := \|x\| + \|Ax\|$. Weiter ist die lineare Abbildung

$$D(A) \to G(A), \quad x \mapsto (x, Ax)$$

bijektiv und isometrisch (und damit stetig). Dabei fassen wir $G(A)$ als Unterraum von $X \times X$ auf.

Bitte wenden!

(c) Es sei $A\colon D(A) \to X$ ein Operator. Dann ist A genau dann abgeschlossen, wenn $(D(A), \|\cdot\|_A)$ vollständig (d.h. ein Banachraum) ist.
(d) Es sei $A\colon D(A) \to X$ ein Operator. Man nennt A **abschließbar**, wenn es einen abgeschlossenen Operator $B\colon D(B) \to X$ mit $A \subset B$ gibt. Dann gibt es auch einen kleinsten (unter der Ordnungsrelation $\subset$) Operator B mit dieser Eigenschaft. Dieser Operator wird mit $\overline{A}$ bezeichnet.
(e) Es sei $D \subset X$ ein fester Untervektorraum. Genau dann ist jeder Operator $A\colon D(A) \to X$ mit $D(A) = D$ abschließbar, wenn D endlich-dimensional ist.
Hinweis: Eine Richtung ist trivial. Für die andere suche man eine Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $D(A)$, deren Glieder im gesammten linear unabhängig in $D(A)$ sind und definiere Ax_n geeignet (mit Hilfe der Linearen Algebra).

Aufgabe 4 (*Von wohlgestellten Problemen zu Halbgruppen*) (2+2+5*)
Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $A\colon D(A) \to X$ ein dicht-definierter Operator auf X. Wir betrachten das Anfangswertproblem (AWP)

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = Au(t) \qquad (t \geq 0) \\ u(0) = x \end{cases}$$

und nehmen an, dass das Anfangswertproblem **wohlgestellt** ist. Dabei nennt man das AWP wohlgestellt, falls

(i) für jedes $x \in D(A)$ *genau eine* differenzierbare Funktion $u_x\colon [0, \infty) \to X$ mit Werten in $D(A)$ existiert, die das AWP (klassisch) löst, d.h. $u_x(0) = x$ und $\dot{u}_x(t) = Au_x(t)$ für alle $t \geq 0$,

(ii) und weiter $u_x|_{[0,t_0]}$ für jedes $t_0 \in (0, \infty)$ stetig von x abhängt, d.h.

$$\sup_{t\in[0,t_0]} \|u_{x_n}(t) - u_x(t)\| \to 0 \text{ (für } n \to \infty),$$

falls $x_n \to x$ (für $n \to \infty$) in X (wobei $x_n, x \in D(A)$).

(a) Man zeige, dass es für festes $t \in [0, \infty)$ genau einen beschränkten Operator $T(t)\colon X \to X$ gibt mit $T(t)x = u_x(t)$ für jedes $x \in D(A)$.
(b) Man beweise, dass $(T(t))_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe auf X definiert.
(c) Man zeige, dass A abschließbar ist und $\overline{A}$ der Generator von $(T(t))_{t\geq 0}$ ist.
Hinweis: Wir bezeichnen mit B den Generator von $(T(t))_{t\geq 0}$. Man kann elementar einsehen, dass $A \subset B$ und damit $\overline{A} \subset B$ gilt. Es fehlt also noch zu zeigen, dass $D(A)$ dicht in $(D(B), \|\cdot\|_B)$ ist.