ulm university universität uulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2014/2015

Übungsblatt 3

Evolutionsgleichungen

Abgabe ist am 5.11.2014 um 12 Uhr in der Übung

Aufgabe 1 (*Multiplikationsoperatoren*) (3+4+5+2)
Es sei (Ω, Σ, μ) ein σ-endlicher Maßraum und $p \in [1, \infty)$. Weiter sei $m\colon \Omega \to \mathbb{K}$ eine messbare Funktion. Wir definieren den Operator

$$M_m := mf$$

mit Definitionsbereich

$$D(M_m) := \{f \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu) : \; mf \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu)\}.$$

(a) Man zeige, dass M_m abgeschlossen und dicht-definiert ist und M_m genau dann ein beschränkter Operator ist, wenn m wesentlich beschränkt ist.

(b) Man beweise

$$\sigma(M_m) = \operatorname{essim} m = \left\{x \in \mathbb{R} : \; \forall r > 0 \text{ ist } m^{-1}(B(x,r)) \text{ keine Nullmenge.}\right\}.$$

(c) Man zeige, dass falls $\operatorname{Re} m(x) \leq \omega$ für alle $x \in \Omega$ bis auf eine Nullmenge für ein $\omega \in \mathbb{R}$ gilt, dann ist M_m der Erzeuger der C_0-Halbgruppe $\left(M_{\exp(tm)}\right)_{t \geq 0}$ aus Blatt 1 Aufgabe 3.
Hinweis: Es sei A der Generator der C_0-Halbgruppe. Man zeige, dass für $f \in D(A)$ bereits $(Af)(x) = m(x)f(x)$ für fast alle $x \in \Omega$ gilt. Damit ist schell klar, dass $A \subset M_m$ ist. Es fehlt noch der Beweis für $D(A) = D(M_m)$ (z.B. mit wesentlichen Definitionsbereichen).

(d) Man zeige analoge Aussagen (man muss die Behauptungen in (a) und (b) leicht abändern) auch für den Fall, dass (Ω, Σ, μ) nicht σ-endlich ist.
Hinweis: Man ersetze jeweils den Begriff der Nullmenge durch Mengen $A \subset \Omega$ die die Eigenschaft haben, dass $\mu(B) = 0$ oder $\mu(B) = \infty$ für jede messbare Teilmenge $B \subset A$ gilt.

Aufgabe 2 (*Erzeuger der Translationshalbgruppe*) (3+3+5*+5*)
Es sei T die Translationshalbgruppe auf $L^p(I)$ aus Aufgabe 1 auf Blatt 1 für $p < \infty$, d.h. es ist $(T(t)f)(s) = f(t+s)$ für fast alle $s \in I$ mit $t + s \in I$ und $(T(t)f)(s) = 0$ sonst. Dabei ist $I = (a,b)$ ein offenes nicht-triviales Intervall.

(a) Man zeige, dass der Erzeuger der Translationshalbgruppe gegeben ist durch den Abschluss $\overline{A}$ des Operators $A\colon D(A) \to L^p((a,b))$ mit

$$Af = f'$$

und $D(A) = C_c^1([a,b))$, falls $a > -\infty$ und $D(A) = C_c^1((a,b))$, falls $a = -\infty$.
Hinweis: $D(A)$ ist ein wesentlicher Definitionsbereich (warum?).

(b) Wir betrachten im Falle von $b < \infty$ und $a > -\infty$ den Operator $B\colon D(B) \to X$ mit $Bf = f'$ und

$$D(B) = \left\{f \in C^1([a,b]) : \; f'(b) = 0\right\}.$$

Man zeige, dass der Abschluss von B für $X = L^p((a,b))$ existiert und B im Falle $X = C([a,b])$ abgeschlossen ist.
Hinweis: Der Fall $X = C([a,b])$ ist einfach. Um zu zeigen, dass B für $X = L^p((a,b))$ abschließbar ist, muss man nur zeigen, dass aus $f_n \to 0$ $(n \to \infty)$ mit $f_n \in D(B)$ und $Bf_n \to g$

Bitte wenden!

$(n \to \infty)$ bereits $g = 0$ folgt (warum?). Die Konvergenz ist in $L^p((a,b))$ zu verstehen. Um dies zu zeigen, beweise man in einem Zwischenschritt (partielle Integration und Grenzübergang!), dass

$$\int_a^b \varphi g \; dx = 0$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}((a,b))$ gilt.

(c) Wir betrachten den Operator B aus Teilaufgabe (b) mit $X = L^p((a,b))$. Man zeige, dass $\overline{B}$ keine C_0-Halbgruppe erzeugt.
Hinweis: Offensichtlich gilt $A \subset B$. Wenn jetzt noch $\overline{A} \neq \overline{B}$ gilt, ist man fertig (warum?). Es ist nun also ein Element $f \in D(\overline{B})$ zu suchen, welches nicht in $D(\overline{A})$ liegt. Ein Beispiel ist $f \equiv 1$.

(d) Wir betrachten wieder den Operator B aus Teilaufgabe (b) aber diesmal mit $X = C([a,b])$. Man zeige, dass B eine C_0-Halbgruppe erzeugt.
Hinweis: Man kann die C_0-Halbgruppe direkt hinschreiben (diese ist sehr ähnlich zur Translationshalbgruppe nur wird die Funktion nicht mit 0 fortgesetzt). Dann zeigt man, dass B in der Tat der Erzeuger dieser C_0-Halbgruppe ist (ähnlich wie bei Blatt 2 Aufgabe 1).