



Übungsblatt 4 Evolutionsgleichungen

Abgabe ist am 12.11.2014 um 12 Uhr in der Übung

Aufgabe 1 (*Direkte Anwendungen von Hille-Yosida*) (5+10*)

In dieser Ausgabe sollen Sie explizit nicht auf Lumer-Phillips zurückgreifen, sondern Hille-Yosida direkt benutzen. Versuchen Sie dabei mit möglichst elementaren Methoden die Voraussetzungen zu überprüfen.

- (a) Es sei M_m der Multiplikationsoperator zu einer messbaren Funktion $m: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ auf $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ (siehe Blatt 3). Dabei sei (Ω, Σ, μ) ein beliebiger σ -endlicher Maßraum. Man zeige durch direkte Anwendung des Hille-Yosida Theorems, dass M_m genau dann eine C_0 -Halbgruppe erzeugt, wenn es $\omega > 0$ und eine Nullmenge $A \in \Sigma$ gibt mit $\operatorname{Re} m(x) < \omega$ für alle $x \in A^c$.

Bemerkung: Wenn man nicht voraussetzt, dass A eine Nullmenge ist, sondern nur die Eigenschaft $\mu(B) \in \{0, \infty\}$ für alle messbaren $B \subset A$ fordert, kann man wieder auf die Voraussetzung σ -endlich verzichten.

- (b) Es sei $A: D(A) \rightarrow C_0(\mathbb{R})$ gegeben durch $Af = f''$. Man zeige, dass A eine C_0 -Halbgruppe auf $C_0(\mathbb{R})$ erzeugt, indem man die Voraussetzungen von Hille-Yosida überprüft. Dabei ist

$$D(A) = \{f \in C^2(\mathbb{R}) : f, f'' \in C_0(\mathbb{R})\}.$$

Aufgabe 2 (*Direkte Anwendung von Lumer-Phillips*) (5+5*)

Zeigen Sie durch Anwendung von Lumer-Phillips, dass die unten definierten Operatoren A (Dirichlet-Laplace auf $(0, 1)$) und B (Neumann-Laplace auf $(0, 1)$) eine C_0 -Halbgruppe erzeugen.

- (a) Es sei $A: D(A) \rightarrow C_0((0, 1))$ gegeben durch $Af = f''$. Dabei ist

$$D(A) = \{f \in C^2([0, 1]) : f, f'' \in C_0((0, 1))\}.$$

- (b) Es sei $B: D(B) \rightarrow C([0, 1])$ gegeben durch $Bf = f''$. Dabei ist

$$D(B) = \{f \in C^2([0, 1]) : f' \in C_0((0, 1))\}.$$

Aufgabe 3 (*Tensorprodukt von C_0 -Halbgruppen auf $C_0(\Omega)$*) (5*+2*+3*)

Es seien Ω_1, Ω_2 zwei lokal kompakte Hausdorff-Räume. Es sei T_1 eine C_0 -Halbgruppe auf $C_0(\Omega_1)$ mit Erzeuger A_1 und T_2 eine C_0 -Halbgruppe auf $C_0(\Omega_2)$ mit Erzeuger A_2 . Für $f \in C_0(\Omega_1)$ und $g \in C_0(\Omega_2)$ definieren wir $f \otimes g \in C_0(\Omega_1 \times \Omega_2)$ über $(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y)$ für alle $x \in \Omega_1$ und alle $y \in \Omega_2$.

- (a) Man zeige, dass es genau eine C_0 -Halbgruppe T auf $C_0(\Omega_1 \times \Omega_2)$ gibt mit $T(t)(f \otimes g) = (T_1(t)f) \otimes (T_2(t)g)$ für alle $f \in C_0(\Omega_1)$ und $g \in C_0(\Omega_2)$.
- (b) Man zeige, dass der Erzeuger von T gegeben ist durch den Abschluss des Operators $A: D(A) \rightarrow C_0(\Omega_1 \times \Omega_2)$ mit $A(f \otimes g) = (A_1f) \otimes g + f \otimes (A_2g)$ und

$$D(A) = \operatorname{span} \{f \otimes g : f \in D(A_1), g \in D(A_2)\}.$$

- (c) Man zeige, dass der Abschluss von $A: D(A) \rightarrow C_0(\mathbb{R} \times [0, 1])$ mit $Af = \Delta f$ und

$$D(A) = \left\{ f \in C^2(\mathbb{R} \times [0, 1]) : f, \Delta f \in C_0(\mathbb{R} \times [0, 1]) \text{ und } \partial_2 f(\cdot, 0) = \partial_2 f(\cdot, 1) = 0 \right\}$$

eine C_0 -Halbgruppe auf $C_0(\mathbb{R} \times [0, 1])$ erzeugt. *Bemerkung:* Man kann sich nun sehr leicht viele verschiedene Beispiele von C_0 -Halbgruppen aus eindimensionalen zusammenbasteln.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (*Interpretation der Ergebnisse*)

(10)

Formulieren Sie die Aussage in Aufgabe 1 (b) und Aufgabe 2 (b) ganz explizit in Aussagen über ein Anfangsrandwertproblem um. Man versuche dabei möglichst nur elementare Begriffe zu verwenden (beispielsweise nicht „die Funktion $f: [0, \infty) \rightarrow C_0(\mathbb{R})$ ist differenzierbar“- man versuche dies lieber über Eigenschaften von $g(t, x) = f(t)(x)$ auszudrücken.)