ulm university universität uulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2014/2015

Übungsblatt 5

Evolutionsgleichungen

Abgabe ist am 19.11.2014 um 12 Uhr in der Übung

Aufgabe 1 (*Wiederholung*) (10+10*)

(a) Es sei T der Linksshift (Translationshalbgruppe - siehe Blatt 1) auf $L^p((-\infty,0))$. Man zeige, dass der Erzeuger A von T gegeben ist durch

$$(f,g) \in G(A) \Leftrightarrow f,g \in L^p((a,b)) \text{ und } f(x) = \int_0^x g(s)\,ds \text{ für fast alle } x \in (-\infty,0).$$

Mit anderen Worten ist $Af = f'$ (im schwachen Sinn) und $D(A) = W_0^{1,p}((-\infty,0))$.

(b) Beweisen Sie, dass das folgende ARWP wohlgestellt (Existenz und Eindeutigkeit der Lösung u mit entsprechenden klassischen Ableitungen für angegebene f, sowie, dass u stetig abhängt von f gleichmäßig in t, y für beschränkte Zeiten t) ist:

$$\begin{cases} u_t(t,y) = u_{yy}(t,y) + u_y(t,y) & \text{, für } t \geq 0;\ y \in [0,1] \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 & \text{, für } t \geq 0 \\ u(0,y) = f(y) & \text{, für } y \in [0,1]. \end{cases}$$

Dabei sei $f \in C^2([0,1])$ mit $f(0) = f(1) = f_{yy}(0) + f_y(0) = f_{yy}(1) + f_y(1) = 0$ für alle $y \in [0,1]$.

Aufgabe 2 (*Strikt konvexe Räume und glatte Räume*) (5*+5)

Ein Banachraum X heißt **strikt konvex**, falls aus $\|x\| = 1$ und $\|y\| = 1$ für $x \neq y$ bereits $\|\lambda x + (1-\lambda)y\| < 1$ für alle $\lambda \in (0,1)$ folgt. Mit anderen Worten ist X strikt konvex, wenn die Einheitskugel strikt konvex ist.

(a) Es sei X' strikt konvex, dann ist die Menge $\mathrm{dN}(x)$ für alle $x \neq 0$ einelementig[1].
Hinweis: Man benutze den Satz von Hahn-Banach um zu zeige, dass $\mathrm{dN}(x)$ stets nicht leer ist. Weiter sei bemerkt, dass $\mathrm{dN}(x)$ konvex ist. So kann man leicht einen Wiederspruch zur strikten Konvexität von X' erzeugen, falls $\mathrm{dN}(x)$ für ein $x \neq 0$ nicht einelementig ist.

(b) Man bestimme $\mathrm{dN}(x)$ für $x \in L^p(\Omega)$ und $p \in (1,\infty)$. Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass $L^q(\Omega)$ für $q \in (1,\infty)$ strikt konvex ist.
Hinweis: Ein Element in $\mathrm{dN}(f)$ für $f \in L^{p'}(\Omega)\backslash\{0\}$ (reellwertig) ist $\|f\|_p^{1-p}\,\mathrm{sgn}(f)|f|^{p-1}$.

Aufgabe 3 (*Dichtes Bild und Injektivität der dualen Abbildung*) (5*+5)

Es sei A ein Operator auf X. Man zeige folgende Aussagen:

(a) $\ker A' = \{0\}$ ist äquivalent dazu, dass $\mathrm{im}(A)$ dicht in X ist. Hier sei A ein dicht-definierter Operator.
Hinweis: Man benutze den Satz von Hahn-Banach.

(b) Man zeige, dass A genau dann abschließbar ist und der Abschluss von A eine kontraktive C_0-Halbgruppe erzeugt, wenn A dicht-definiert, dissipativ ist und es ein $\lambda > 0$ gibt mit $\ker(\lambda - A') = \{0\}$.

[1] Man nennt X **glatt**, wenn $\mathrm{dN}(x)$ für alle $x \neq 0$ einelementig ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (***Für Interessierte:*** *Anwendung in der Numerik*[2]) (5*+5*)
Es sei T eine C_0-Halbgruppe auf X mit Generator A. Ziel ist es $T(t)x$ für $x \in X$ numerisch zu berechnen. Dazu nutzen wir die Finite-Differenzen-Methode, also eine stark stetige Funktion $F\colon (0,\tau) \to \mathcal{L}(X)$ (für ein $\tau > 0$). Wir sagen die Finite-Differenzen-Methode F ist **konvergent** (gegen T), falls

$$\lim_{k\to\infty} F(h_k)^{n_k} x = T(t)x$$

für alle $x \in X$ gilt, wann immer $n_k \to \infty$ und $n_k h_k \to t-$ (für $k \to \infty$) gilt. Wir sagen die Finite-Differenzen-Methode ist **stabil**, falls für alle $t > 0$ gilt

$$\|F(h)^n\| \le M$$

für ein $M \ge 1$ und alle $h \in (0,\tau)$ und alle $n \in \mathbb{N}$ mit $nh \le t$.

(a) Zeigen Sie, dass eine konvergente Finite-Differenzen-Methode bereits stabil ist.
Hinweis: Man muss nur den Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit und die lokale Beschränktheit von T benutzen.

(b) Beweisen Sie, dass F mit ($r > 0$ ist fest und $h \ge 0$ so, dass $2h < 1$)

$$(F(h^2 r)f)(x) = \begin{cases} f(x) + r\left[f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)\right] & \text{, für } x-h, x+h \in [0,1] \\ f(x) + r\left[0 - 2f(x) + f(2x-1)\right] & \text{, für } x+h \notin [0,1] \\ f(x) + r\left[f(2x) - 2f(x) + 0\right] & \text{, für } x-h \notin [0,1] \end{cases}$$

für $x \in (0,1)$ konsistent ist für die von $Af = f''$ mit

$$D(A) = \left\{ f \in C^2([0,1]) :\ f, f'' \in C_0((0,1)) \right\}$$

erzeugte C_0-Halbgruppe T auf $C_0((0,1))$. Man zeige weiter, dass F stabil und konvergent ist, wenn $r \le 1/2$ gilt. Sie dürfen benutzen:
Der **Äquivalenzsatz von Lax**[3] besagt, dass eine konsistente[4] Finite-Differenzen-Methode F für T genau dann konvergiert, wenn diese stabil ist.
Hinweis: Man kann Konsistenz einfach nachrechnen. Die Konvergenz der Methode ist nach dem Äquivalenzsatz von Lax äquivalent zur Stabilität. Man kann für $r \le 1/2$ einfach nachweisen, dass F stabil ist (sogar, dass $\|F(s)\| \le 1$ ist für alle $s \in (0, 4^{-1}r)$ gilt). Für $r > 1/2$ kann man beweisen, dass $F\left(t/n\right)^n$ für $n \to \infty$ (t fest) in der Norm unbeschränkt ist (die Methode also nicht stabil und nicht konvergent ist).

[2] Diese Aufgabe wird nur besprochen, wenn sich dafür Zeit in der Übung findet.
[3] Diesen Satz beweisen wir später entweder in der Übung oder in der Vorlesung.
[4] Die genaue Definition von Konsistenz geben wir später. Fürs Erste reicht es zu wissen, dass F konsistent ist, wenn

$$\lim_{h\to 0+} \frac{F(h)x - x}{h} = Ax$$

für alle $x \in D(A)$ gilt.