ulm university universität uulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2014/2015

Übungsblatt 7

Evolutionsgleichungen

Abgabe ist am 3.12.2014 um 12 Uhr in der Übung

Aufgabe 1 (*Vergleich von drei C_0-Halbgruppen erzeugt von Laplace-Operatoren*) (10*+9+1)
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und Dirichlet-regulär. Wir bezeichnen mit T_2 die C_0-Halbgruppe erzeugt vom Dirichlet-Laplace Δ_2^D auf $L^2(\Omega)$ und mit T_0 die C_0-Halbgruppe erzeugt vom Dirichlet-Laplace Δ_0^D auf $C_0(\Omega)$.

(a) Es sei durch[1]

$$D(\Delta_2^N) = \left\{ u \in H^1(\Omega) : \Delta u \in L^2(\Omega) \text{ und } \int_\Omega \varphi \Delta u = -\int_\Omega (\nabla u)^T (\nabla \varphi) \text{ für alle } \varphi \in H^1(\Omega) \right\}$$

und $\Delta_2^N u = \Delta u$ der Neumann-Laplace auf Ω definiert (hier muss Ω nur offen sein[2]). Man zeige, dass Δ_2^N eine C_0-Halbgruppe T erzeugt.

(b) Man beweise, dass $T_2(t)\varphi = T_0(t)\varphi$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ und alle $t \geq 0$ aber im Allgemeinen $T_2(t)\varphi \neq T(t)\varphi$ gilt. Achten Sie also insbesondere bei ihrem Beweis von $T_2(t)\varphi = T_0(t)\varphi$ darauf, dass dieses Argument nicht auch $T_2(t)\varphi = T(t)\varphi$ zeigen würde (sonst ist ihre Argumentation lückenhaft!).

(c) Folgern Sie, dass $T_2(t)|_{C_0(\Omega)} = T_0(t)$ für alle $t \geq 0$ gilt.

Aufgabe 2 (*Wärmeleitungshalbgruppe in $\mathbb{R}^n$ auf verschiedenen Räumen*) (15*+10)

(a) Es seien $T_1, ..., T_n$ kommutierende C_0-Gruppen auf X mit Erzeugern $A_1, ..., A_n$. Zeigen Sie, dass dann $A = A_1^2 + ... + A_n^2$ mit $D(A) = D(A_1^2) \cap ... \cap D(A_n^2)$ abschließbar ist und der Abschluß eine C_0-Halbgruppe auf X erzeugt.

(b) Zeigen Sie, dass für $X \in \{C_0(\mathbb{R}^n), L^p(\mathbb{R}^n), C_{ub}(\mathbb{R}^n)\}$ eine C_0-Halbgruppe mit Erzeuger A gibt derart, dass $Af = \Delta f$ für alle $f \in D(A)$ im schwachen Sinne gilt.
Dabei sei $p \in [1, \infty)$ und $C_{ub}(\mathbb{R}^n)$ der Raum der gleichmäßig stetigen und beschränkten Funktionen mit Supremumsnorm.

Aufgabe 3 (***Für Interessierte:*** *Anwendung in der Numerik III*[3]) (10*+5*)
Diese Aufgabe ist eine Fortsetzung von Aufgabe 4 auf Blatt 5 und Aufgabe 4 auf Blatt 6. Für die Notationen (insbesondere Konvergenz und Stabilität) sei auf dieses Blatt verwiesen.
Wir sagen nun, dass eine Finite-Differenzen-Methode $F\colon [0, \tau] \to X$ **konsistent** mit einer C_0-Halbgruppe T ist, falls

$$\lim_{h \to 0+} \sup_{t \in [0,\sigma]} \left\| \frac{F(h)T(t)x - T(t+h)x}{h} \right\| = 0$$

für alle $x \in D$ und alle $\sigma > 0$ gilt (dabei sei D dicht in X).

[1] Man beachte, dass hier

$$\int_\Omega \varphi \Delta u = -\int_\Omega (\nabla u)^T (\nabla \varphi)$$

nicht nur für Elemente φ aus $\mathcal{D}(\Omega)$ sondern für alle Elemente aus $H^1(\Omega)$ fordert. Außerdem sei Δu im schwachen Sinne zu verstehen.

[2] Diesen Operator den Neumann-Laplace zu nennen ist zumindest für Lipschitz-Gebiete gerechtfertigt. Dass der formale Operator wieder eine C_0-Halbgruppe erzeugt, ist für alle offenen Mengen richtig. Über die Rechtfertigung des Namens lässt sich dann aber streiten.

[3] Diese Aufgabe wird nur besprochen, wenn sich dafür Zeit in der Übung findet.

Bitte wenden!

(a) Es sei eine Finite-Differenzen-Methode F mit

$$\lim_{h\to 0+} \frac{F(h)x - x}{h} = Ax$$

für alle $x \in D$ gegeben. Dabei sei $D \subset D(A)$ dicht in X und $T(t)$-invariant sowie A der Erzeuger von T. Man zeige, dass F dann konsistent mit T ist.

(b) Beweisen Sie den Äquivalenzsatz von Lax (eine Richtung findet sich auf Blatt 5), d.h. zeigen Sie, dass eine konsistente und stabile Finite-Differenzen-Methode bereits konvergent ist (Benutzen Sie eine Teleskopsumme).