Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2014/2015

Übungsblatt 7

Evolutionsgleichungen

Abgabe ist am 3.12.2014 um 12 Uhr in der Übung

Aufgabe 1 (*Vergleich von drei C_0-Halbgruppen erzeugt von Laplace-Operatoren*) (10*+9+1)
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und Dirichlet-regulär. Wir bezeichnen mit T_2 die C_0-Halbgruppe erzeugt vom Dirichlet-Laplace Δ_2^D auf $L^2(\Omega)$ und mit T_0 die C_0-Halbgruppe erzeugt vom Dirichlet-Laplace Δ_0^D auf $C_0(\Omega)$.

(a) Es sei durch[1]

$$D(\Delta_2^N) = \left\{ u \in H^1(\Omega) : \Delta u \in L^2(\Omega) \text{ und } \int_\Omega \varphi \Delta u = -\int_\Omega (\nabla u)^T (\nabla \varphi) \text{ für alle } \varphi \in H^1(\Omega) \right\}$$

und $\Delta_2^N u = \Delta u$ der Neumann-Laplace auf Ω definiert (hier muss Ω nur offen sein[2]). Man zeige, dass Δ_2^N eine C_0-Halbgruppe T erzeugt.
Hinweis: Imitieren Sie die Schritte aus der Vorlesung für den Dirichlet-Laplace auf $L^2(\Omega)$. Die Argumente sind ähnlich und teilweise identisch.

(b) Man beweise, dass $T_2(t)\varphi = T_0(t)\varphi$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ und alle $t \geq 0$ aber im Allgemeinen $T_2(t)\varphi \neq T(t)\varphi$ gilt. Achten Sie also insbesondere bei ihrem Beweis von $T_2(t)\varphi = T_0(t)\varphi$ darauf, dass dieses Argument nicht auch $T_2(t)\varphi = T(t)\varphi$ zeigen würde (sonst ist ihre Argumentation lückenhaft!).
Hinweis: Es sei bemerkt, dass $D(\Delta_0^D) \subset D(\Delta_2^D)$ nicht trivial ist. Dies ist die Hauptschwierigkeit an der Aufgabe (um alle Punkte für diese Aufgabe zu bekommen, dürfen Sie dies auch einfach annehmen). Wenn man das einmal hat, dann kann man einfach zeigen, dass $t \mapsto T_0(t)\varphi$ eine klassische Lösung des AWPs $\dot{u}(t) = \Delta_2^D u(t)$ für $t \geq 0$ und $u(0) = \varphi$ ist. Die Wohlgestelltheit des Problems zeigt dann die Behauptung.

(c) Folgern Sie, dass $T_2(t)|_{C_0(\Omega)} = T_0(t)$ für alle $t \geq 0$ gilt.

Aufgabe 2 (*Wärmeleitungshalbgruppe in $\mathbb{R}^n$ auf verschiedenen Räumen*) (15*+10)

(a) Es seien $T_1, ..., T_n$ kommutierende C_0-Gruppen auf X mit Erzeugern $A_1, ..., A_n$. Zeigen Sie, dass dann $A = A_1^2 + ... + A_n^2$ mit $D(A) = D(A_1^2) \cap ... \cap D(A_n^2)$ abschließbar ist und der Abschluß eine C_0-Halbgruppe auf X erzeugt.
Hinweis: Behandeln Sie den Fall $n = 1$ zuerst (für kontraktive C_0-Gruppen haben Sie dies bereits in der Vorlesung gesehen - Sie dürfen annehmen, dass die Gruppe beschränkt ist; der allgemeine Fall wird auf Blatt 8 nachgeholt!). Zeigen Sie dann, dass die C_0-Halbgruppen mit Erzeugern A_i^2 kommutieren und folgern Sie daraus die Behauptung.

(b) Zeigen Sie, dass für $X \in \{C_0(\mathbb{R}^n), L^p(\mathbb{R}^n), C_{ub}(\mathbb{R}^n)\}$ eine C_0-Halbgruppe mit Erzeuger A gibt derart, dass $Af = \Delta f$ für alle $f \in D(A)$ im schwachen Sinne gilt.
Dabei sei $p \in [1, \infty)$ und $C_{ub}(\mathbb{R}^n)$ der Raum der gleichmäßig stetigen und beschränkten Funktionen mit Supremumsnorm.

---

[1] Man beachte, dass hier

$$\int_\Omega \varphi \Delta u = -\int_\Omega (\nabla u)^T (\nabla \varphi)$$

nicht nur für Elemente φ aus $\mathcal{D}(\Omega)$ sondern für alle Elemente aus $H^1(\Omega)$ fordert. Außerdem sei Δu im schwachen Sinne zu verstehen.

[2] Diesen Operator den Neumann-Laplace zu nennen ist zumindest für Lipschitz-Gebiete gerechtfertigt. Dass der formale Operator wieder eine C_0-Halbgruppe erzeugt, ist für alle offenen Mengen richtig. Über die Rechtfertigung des Namens lässt sich dann aber streiten.

Bitte wenden!

Hinweis: Benutzen Sie (a) für die n Translationsgruppen auf X (Translation in jeweils eine feste Koordinatenrichtung).

Aufgabe 3 (***Für Interessierte:*** *Anwendung in der Numerik III*[3]) (10*+5*)
Diese Aufgabe ist eine Fortsetzung von Aufgabe 4 auf Blatt 5 und Aufgabe 4 auf Blatt 6. Für die Notationen (insbesondere Konvergenz und Stabilität) sei auf dieses Blatt verwiesen.
Wir sagen nun, dass eine Finite-Differenzen-Methode $F\colon [0,\tau] \to X$ **konsistent** mit einer C_0-Halbgruppe T ist, falls

$$\lim_{h\to 0+} \sup_{t\in[0,\sigma]} \left\| \frac{F(h)T(t)x - T(t+h)x}{h} \right\| = 0$$

für alle $x \in D$ und alle $\sigma > 0$ gilt (dabei sei D dicht in X).

(a) Es sei eine Finite-Differenzen-Methode F mit

$$\lim_{h\to 0+} \frac{F(h)x - x}{h} = Ax$$

für alle $x \in D$ gegeben. Dabei sei $D \subset D(A)$ dicht in X und $T(t)$-invariant sowie A der Erzeuger von T. Man zeige, dass F dann konsistent mit T ist.

(b) Beweisen Sie den Äquivalenzsatz von Lax (eine Richtung findet sich auf Blatt 5), d.h. zeigen Sie, dass eine konsistente und stabile Finite-Differenzen-Methode bereits konvergent ist (Benutzen Sie eine Teleskopsumme).
Hinweis: Benutzen Sie die Teleskopsumme

$$T(t_k)^{n_k}x - F(t_k)^{n_k}x = \sum_{l=0}^{n_k-1} \Big(F(t_k)^l T(t_k)^{n_k-l}x - F(t_k)^{l+1}T(t_k)^{n_k-l-1}x \Big).$$

[3] Diese Aufgabe wird nur besprochen, wenn sich dafür Zeit in der Übung findet.