Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2014/2015

# Übungsblatt 8

**Evolutionsgleichungen**

Abgabe ist am 10.12.2014 um 12 Uhr in der Übung

**Aufgabe 1** (*$C_0$-Halbgruppen durch $C_0$-Gruppen*) (10*+10)

Es sei $U\colon \mathbb{R} \to \mathcal{L}(X)$ eine $C_0$-Gruppe mit Generator $A$. Sie dürfen benutzen, dass $A^2$ eine $C_0$-Halbgruppe $T$ erzeugt. Wir wollen eine konkrete Darstellung von $T$ durch $U$ bekommen.

(a) Man zeige, dass

$$S(t)x = \frac{1}{\sqrt{4t\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\right) U(\tau)x \, d\tau$$

für alle $x \in X$ und $t > 0$ eine $C_0$-Halbgruppe definiert.

(b) Man zeige, dass $S = T$ gilt.

**Aufgabe 2** (*Holomorphie und Winkel für die Wärmeleitungshalbgruppe*) (5+5+10*)

In den ersten beiden Teilaufgaben diskutieren wir die Analytizität der Wärmeleitungshalbgruppe und leiten in der letzten Teilaufgabe wichtige Identitäten für diese her.

(a) Es sei $A$ ein dicht-definierter Operator auf einem **komplexen** Banachraum. Weiter sei $\lambda - A$ surjektiv für ein $\lambda$ mit $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$ und für alle $f \in D(A)$ existiere ein $g \in \mathrm{dN}(f)$ mit $\langle g, Af\rangle \in (-\infty, 0]$. Man zeige, dass dann $iA$ eine kontraktive $C_0$-Gruppe und $A$ eine kontraktive holomorphe $C_0$-Halbgruppe $(T(z))_{\operatorname{Re} z>0}$ erzeugt. Weiter kann diese stark-stetig auf $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0\}$ fortgesetzt werden[1] und $(T(it))_{t\in\mathbb{R}}$ ist die von $iA$ erzeugte $C_0$-Gruppe.
*Bemerkung:* Es reicht nicht, dass $\pm iA$ beide $C_0$-Halbgruppen erzeugen.

(b) Es sei $Af = f''$ mit $D(A) = H^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$. Man zeige, dass $A$ eine kontraktive holomorphe $C_0$-Halbgruppe $(T(z))_{\operatorname{Re} z>0}$ erzeugt. Weiter kann diese stark-stetig auf $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0\}$ fortgesetzt werden kann und $(T(it))_{t\in\mathbb{R}}$ ist die von $iA$ erzeugte $C_0$-Gruppe.

(c) Es seien zwei Operatoren auf $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ definiert durch $(\tau_x f)(s) = f(s-x)$ und $(\sigma_p f)(s) = e^{-isp} f(s)$ für fast alle $s \in \mathbb{R}$ (für $x \in \mathbb{R}$ und $p \in \mathbb{C}$) und $T$ die $C_0$-Halbgruppe der vorigen Teilaufgabe. Man zeige, dass

$$T(z)\tau_x = \tau_x T(z)$$

und

$$T(z)\sigma_p = \exp\left(-zp^2\right) \sigma_p \tau_{2ipz} T(z)$$

für alle $z$ mit $\operatorname{Re} z \geq 0$ gilt (wobei $p$ so gewählt ist, dass $ipz \in \mathbb{R}$ gilt). Weiter berechne man $T(z)g$ für

$$g(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-s^2\right) \quad (s \in \mathbb{R})$$

für alle $z$ mit $\operatorname{Re} z \geq 0$ und zeige

$$(T(t)f)(s) = \frac{1}{\sqrt{4t\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\right) f(s-\tau) \, d\tau$$

für fast alle $s \in \mathbb{R}$ und alle $t > 0$.

[1] Die Fortsetzung bezeichnen wir wieder mit $T$.

**Bitte wenden!**

**Aufgabe 3** (***Für Interessierte:*** *Eine einfache Schrödingergleichung I*) (5*+5*+5*+5*)
Es sei $A\colon D(A) \to C_0(\mathbb{R};\mathbb{C})$ mit $D(A) = \{f \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{C}) : \ f, f'' \in C_0(\mathbb{R};\mathbb{C})\}$ und $Af = if''$ gegeben. Ziel wird es sein zu zeigen, dass $A$ nichtmal eine $C_0$-Halbgruppe erzeugt. Wechselt man dagegen den Raum zu $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$, dann erzeugt der entsprechende Operator $B$ sogar eine $C_0$-Gruppe $S$ (siehe Aufgabe 2 (b)). Die Lösung der Aufgabe wird einer physikalischen Anschauung folgen, welche hier vermittelt werden soll. Zudem werden einige wichtige Rechnungen hier vorweggenommen.

(a) Formulieren Sie die Ergebnisse, dass $A$ keine bzw. $B$ eine $C_0$-Halbgruppe erzeugt über Anfangsrandwertprobleme um (benutzen Sie nur klassische Ableitungen in endlich-dimensionalen Räumen bei der Formulierung Ihrer Aussagen!). Die Formulierung soll dabei so gewählt sein, dass der einzige Unterschied darin besteht, dass die stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten in zwei verschiedenen Normen gemeint ist.

(b) Man betrachte nun ein **Gauß-** oder **Wellen-Paket**

$$g_{x,p}\colon y \mapsto \exp\Big(-(y-x)^2 - ipy\Big)$$

(mit $p, x \in \mathbb{R}$). Bestimmen Sie $S(t)g_{x,p}$.

(c) Machen Sie sich schlau über die physikalische Bedeutung der $C_0$-Gruppe $S$ und über die passende Interpretation von $g_{x,p}$ und $S(t)g_{x,p}$. Beschreiben Sie diese auf ihrer Lösung.

(d) Wir betrachten nun eine Überlagerung zweier Wellenpakete $f = g_{x,-p} - g_{-x,p}$ $(p > 0)$. Was würde klassisch am Ort $y = 0$ passieren und was passiert an diesem Ort tatsächlich?