ulm university universität uulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2014/2015

Übungsblatt 9

Evolutionsgleichungen

Abgabe ist am 17.12.2014 um 12 Uhr in der Übung

Aufgabe 1 (*Beispiel und Nicht-Beispiel holomorpher C_0-Halbgruppen*) (5+10)

(a) Es sei $X = L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ mit $D(A) = H^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ und $Af = f'$ für $f \in D(A)$ gegeben. Man zeige, dass A keine holomorphe C_0-Halbgruppe erzeugen kann.
Hinweis: Achten Sie auf das Spektrum von A.

(b) Es sei $X = L^2((0,1);\mathbb{C})$ mit $D(A) = f \in H^2((0,1);\mathbb{C}) \cap H_0^1((0,1);\mathbb{C})$ und $Af = f'' + f'$ für $f \in D(A)$. Man zeige, dass A eine holomorphe C_0-Halbgruppe erzeugt. Man bestimme weiter den maximalen Winkel des Sektors auf dem die von A erzeugte C_0-Halbruppe holomorph fortgesetzt werden kann.
Hinweis: Sie müssen zeigen, dass $e^{i\theta}A$ für $2|\theta| < \pi$ eine quasi-kontraktive C_0-Halbgruppe erzeugt. Dann bekommen Sie den optimalen Winkel $\pi/2$ (warum keinen größeren Winkel?). Um dies zu zeigen werden Sie Lax-Milgram benötigen und den Term $(f|f')$ müssen Sie geschickt abschätzen (z.B. mit Cauchy-Schwarz und Young Ungleichung).

Aufgabe 2 (*Wohlgestelltheit von holomorphen C_0-Halbgruppen*) (5*+5)

(a) Es sei T eine holomorphe C_0-Halbgruppe auf X mit Erzeuger A. Man zeige, dass $T(t)X \subset D(A)$ für alle $t > 0$ gilt und es für jedes $x \in X$ genau eine stetige Funktion $u\colon [0,\infty) \to X$ gibt mit $u|_{(0,\infty)} \in C((0,\infty), D(A)) \cap C^1((0,\infty), X)$, $\dot{u}(t) = Au(t)$ für $t > 0$, und $u(0) = x$. Man zeige weiter, dass u stetig von x abhängt und $u|_{(0,\infty)} \in C^\infty((0,\infty), D(A^n))$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Was können Sie mit den Aussagen der vorigen Teilaufgabe über das Problem

$$\begin{cases} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) + u_x(t,x) & t > 0 \text{ und } x \in [0,1] \\ u(t,1) = u(t,0) = 0 & t > 0 \\ u(0,x) = f(x) & \text{für fast alle } x \in [0,1] \end{cases}$$

aussagen? Dabei ist $f \in L^2((0,1))$. Verwenden Sie dabei möglichst die klassischen Ableitungsbegriffe in endlich-dimensionalen Räumen.

Aufgabe 3 (***Für Interessierte:*** *Eine einfache Schrödingergleichung II*) (10*+10*+10*)

Es sei $A\colon D(A) \to C_0(\mathbb{R};\mathbb{C})$ mit $D(A) = \{f \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{C}) : \ f, f'' \in C_0(\mathbb{R};\mathbb{C})\}$ und $Af = if''$ gegeben. Ziel wird es sein zu zeigen, dass A nichtmal eine C_0-Halbgruppe erzeugt. Es sei B mit $D(B) = H^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ und $Bf = if''$. Auf Blatt 8 Aufgabe 2 (b) haben wir gezeigt, dass B eine C_0-Halbgruppe S auf $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ erzeugt.
Diese Aufgabe ist eine Fortsetzung von Aufgabe 3 auf Blatt 8.

(a) Finden Sie Funktionen $f_n \in L^2(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})$ mit $\|S(1)f_n\|_\infty \geq n\|f_n\|_\infty$.
Hinweis: Wählen Sie f_n als endliche Linearkombination von Wellenpaketen $g_{x,p}$. Sie wollen, dass nach der Zeit $t = 1$ das Teilchen sehr wahrscheinlich an einem Ort aufzufinden ist, aber zum Zeitpunkt $t = 0$ eher an verschiedenen Orten zu finden war.

(b) Folgern Sie, dass A keine C_0-Halbgruppe erzeugt.

(c) Geben Sie eine Skizze der gesammten Argumentation (wie hat man $S(t)g_{x,p}$ berechnet,...) und interpretieren Sie Ihre Wahl von f_n physikalisch.