ulm university universität uulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2015/2016

Übungsblatt 10

Lineare Algebra 1

Die Abgabe der Übungsaufgaben ist einzeln am Mittwoch **13.1.2016** um spätestens **16ct**.

Notwendige Daten auf dem Deckblatt: Name; E-Mail-Adresse; Namen der Teammitglieder; Tutorname; Tutoriumsnummer; Aufgaben für die Sie zuständig sind

---

Übungsaufgabe 1 (*Verknüpfung und Abbildungsverhalten in Darstellungsmatrizen*) (6+9)
Wir betrachten die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{3\times 2}$, welche definiert ist über

$$f(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} A$$

für $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Zudem betrachten wir die lineare Abbildung $g\colon \mathbb{R}^{3\times 2} \to \mathbb{R}^3$, welche definiert ist über

$$g(B) = B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für $B \in \mathbb{R}^{3\times 2}$. Als Basis für den Raum $\mathbb{R}^{2\times 2}$ benutzen wir

$$\mathcal{A} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Als Basis für den Raum $\mathbb{R}^{3\times 2}$ benutzen wir

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

und für $\mathbb{R}^3$ nehmen wir die Standardbasis $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$.

(a) Berechnen Sie die Darstellungsmatrizen $A(f)$, $A(g)$ und $A(g \circ f)$.

(b) Bestimmen Sie den Koeffizentenvektor[1] für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

und danach von $g(f(A))$ einmal direkt, indem Sie $g(f(A))$ berechnen, und einmal indirekt, indem Sie die Darstellungsmatrix $A(g \circ f)$ benutzen.

Übungsaufgabe 2 (*Basiswechsel und Darstellungsmatrizen*) (4+6+10)
Als erstes Beispiel betrachten wir eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, welche $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = e_3$ und $f(e_3) = e_1$ erfüllt. Wir betrachten einmal die Standardbasis $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ und einmal die Basis $\mathcal{C}' = (e_1 + e_2 + e_3, e_1 - e_2, e_2 - e_3)$.

[1] Ein Koeffizentenvektor für $v \in V$ bezüglich einer Basis $v_1, ..., v_n$ ist ein Vektor $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$ mit $v = \sum_{k=1}^n x_k v_k$.

Bitte wenden!

Als zweites Beispiel betrachten wir die Abbildung $g\colon P_4(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ definiert über

$$g(p) = \begin{pmatrix} p(1) \\ p(-1) \\ p(2) \\ p(-2) \end{pmatrix}, \ p \in P_4(\mathbb{R})$$

Wir betrachten auf $\mathbb{R}^4$ die Standardbasis $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ sowie die Basis $\mathcal{B}' = (e_1-e_2, e_3-e_4, e_1+e_2, e_3+e_4)$ und auf $P_4(\mathbb{R})$ die Basis $\mathcal{A} = (e_0, e_1, e_2, e_3, e_4)$ sowie die Basis $\mathcal{A}' = (p_0, p_1, p_2, p_3, p_4)$ mit ($k = 0, ..., 4$; $x \in \mathbb{R}$)

$$e_k(x) = x^k,\ p_0(x) = x,\ p_1(x) = x^3,\ p_2(x) = 1,\ p_3(x) = x^2,\ p_4(x) = x^4$$

(a) Man bestimme die Darstellungsmatrizen $A^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f)$ und $A^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(g)$.
(b) Man berechne die Basiswechselmatrizen (auch Transformationsmatrizen genannt) von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$ und $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{C}'$.
(c) Man berechne $A^{\mathcal{C}'}_{\mathcal{C}'}(f)$ und $A^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{B}'}(g)$ über die Transformationsformel.

Übungsaufgabe 3 (*Ähnlichkeit und Äquivalenz in Abhängigkeit vom Skalarkörper*) (5+10*)
Man zeige folgende Aussagen[2]:

(a) Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ äquivalent als komplexe Matrizen (d.h. es existieren $\tilde{S} \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{C}), \tilde{T} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ mit $\tilde{T}A\tilde{S}^{-1} = B$), dann sind auch A, B äquivalent als reelle Matrizen (d.h. es existieren $S \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ und $T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ mit $TAS^{-1} = B$).
Hinweis: Äquivalenz hat mit dem Rang zu tun.
(b) Sind $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben und A, B ähnlich als komplexe Matrizen (d.h. es existiert $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ mit $AS = SB$), dann sind auch A, B ähnlich als reelle Matrizen (d.h. es existiert $T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ mit $AT = TB$).
Hinweis: Man kann $S = S_1 + iS_2$ für $S_1, S_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ schreiben. Zeigen Sie $AS_1 = S_1B$ und $AS_2 = S_2B$. Leider kann man weder $S_1 \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ noch $S_2 \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ schließen. Aber aus den beiden Matrizen kann man $T = S_1 + \lambda S_2$ für geeignetes $\lambda \in \mathbb{R}$ zusammensetzen.

[2] Die Aussage in (a) gilt auch, wenn man statt $\mathbb{R}$ einen Körper $\mathbb{K}$ und statt $\mathbb{C}$ einen Körper $\mathbb{L}$ nimmt mit $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$, wobei Addition und Multiplikation von $\mathbb{K}$ die von $\mathbb{L}$ sind. Die Aussage in (b) ist ein Spezialfall eines Korollars eines viel allgemeineren Lemmas von Frobenius, welches besagt, dass $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ genau dann ähnlich in $\mathbb{K}$ sind, wenn $A - XE_n, B - XE_n$ äquivalent in $\mathbb{K}[X]$ sind.

Bitte wenden!

Tutoriumsaufgabe 1 (*Eine Spiegelung in* $\mathbb{R}^3$) (0)
Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Spiegelung an der Ebene (dies ist eine lineare Abbildung!)

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + y + z = 0 \right\}.$$

(a) Man bestimme eine Basis v_1, v_2 von U.
(b) Man berechne die Darstellungsmatrix $A^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(f)$ für $\mathcal{A} = (v_1, v_2, v_3)$ mit

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Man bestimme die Basiswechselmatrix (auch Transformationsmatrix $T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} = A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id})$ genannt) von der Standardbasis $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ nach $\mathcal{A}$.
(d) Man berechne die Darstellungsmatrix $A = A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ über die Transformationsformel. Was hat F_A mit f zu tun?