Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2015/2016

Übungsblatt 11

Lineare Algebra 1

Die Abgabe der Übungsaufgaben ist einzeln am Mittwoch **13.1.2016** um spätestens **16ct**.

Notwendige Daten auf dem Deckblatt: Name; E-Mail-Adresse; Namen der Teammitglieder; Tutorname; Tutoriumsnummer; Aufgaben für die Sie zuständig sind

---

Übungsaufgabe 1 (*Determinanten berechnen*) (10+10)

(a) Berechnen Sie die Determinante von folgenden reellen Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 & 10 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Berechnen Sie die Determinante von folgenden komplexen Matrizen in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{C}$ und finde gegebenenfalls die $\lambda \in \mathbb{C}$, für welche die Determinante Null ist[1]:

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & \lambda-2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \lambda-1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \lambda-10 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 10 & 5 & \lambda+1 \end{pmatrix}, \ B_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda+2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \lambda+2 \end{pmatrix}$$

und

$$C_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & \lambda-1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & \lambda-2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

Übungsaufgabe 2 (*Nützliche Formeln für Determinanten*) (10+10)

(a) Es seien A, B quadratische Matrizen und C eine Matrix passender Größe. Man finde eine Formel für die Determinante der folgenden dreiecksgeblockten Matrix

$$D = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

und beweise diese.

[1] Determinanten von Matrizen, welche in der Diagonalen noch eine Variable enthalten, werden Sie sicher in der Klausur berechnen müssen. Diese kommen ins Spiel, wenn man beispielsweise Matrixpotenzen berechnen will. Dazu später mehr! Zudem müssen Sie dann auch die Werte für die Variable finden können, wo die Determinante 0 ist.

(b) Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine untere oder obere Dreiecksmatrix mit den Diagonaleinträgen $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$. Man zeige

$$\det A = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k.$$

Übungsaufgabe 3 (*Winteraufgabe*) (5*+5*+5*)

Diese Aufgabe ist eine gute Gelegenheit nochmal einigen Stoff, den Sie im Semester gelernt haben, zu wiederholen. Es sei $S \subset \mathbb{R}^2$ die dargestellte Schneeflocke, welche im Nullpunkt zentriert sei.

Wir betrachten die Menge (dies ist die Symmetriegruppe zu S)

$$G = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \; F_A(S) = S\}.$$

(a) Man zeige, dass G mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe bildet. Ist die Gruppe abelsch?
Hinweis: Für die Existenz der Inverse muss man sich überlegen, warum F_A bijektiv sein muss (Surjektivität ist recht einfach zu begründen).

(b) Man zeige, dass F_A für $A \in G$ die äußeren Spitzen von S wieder auf eine der äußeren Spitzen abbildet und benachbarte Spitzen benachbart bleiben.
Hinweis: Die einzigen Geraden, die S in genau zwei Punkten schneiden gehen durch benachbarte äußere Spitzen der Schneeflocke. Dies dürfen Sie benutzen.

(c) Man benutze die Aussage in (b) um zu zeigen, dass G höchstens 12 Elemente enthält. In der Tat hat G genau 12 Elemente (diese kann man explizit angeben). Dies müssen Sie aber nicht zeigen.
Hinweis: F_A wird bereits durch die Bilder von zwei festen benachbarten äußeren Spitzen festgelegt (warum?).

Bitte wenden!

Tutoriumsaufgabe 1 (*Determinate berechnen*) (0)

Man berechne die Determinante der folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Erholsame Ferien und Guten Rutsch!